

PAOLA GERVASIO

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

CON METODI SPETTRALI

IN REGIONI PARTIZIONATE IN SOTTODOMINI

Tesi di Dottorato in Matematica

Relatore: Ch.mo Prof. **ALFIO QUARTERONI**

Università di Milano

Sedi consorziate: Università Cattolica di Brescia,

Politecnico di Milano, Università di Pavia

VI ciclo

Indice

I	Problemi lineari	11
1	Operatori ellittici autoaggiunti	13
1.1	Il metodo di Galerkin e Galerkin generalizzato	16
1.2	L'Approssimazione Spettrale	17
1.2.1	Formule di quadratura di tipo gaussiano	18
1.2.2	Proiezione di Legendre	21
1.2.3	Interpolazione di Legendre	23
1.2.4	Derivazione di Legendre	27
1.3	Interpretazione algebrica del problema discreto	30
1.3.1	Risolutori algebrici	32
1.3.2	Precondizionatori	33
1.3.3	Il preconditionatore agli elementi spettrali bilineari	35
1.4	Equivalenza con lo schema di collocazione debole	39
2	Il problema di diffusione trasporto stazionario	43
2.1	Interpretazione algebrica	45
2.1.1	Risolutori e preconditionatori	46
2.2	Tecniche di stabilizzazione	50
2.2.1	Interpretazione algebrica del problema stabilizzato	52
3	I problemi parabolici di diffusione trasporto	57
3.1	Interpretazione algebrica	59
3.2	Discretizzazione in tempo	59
3.3	Gli schemi a passi frazionari (Fractional Step)	60
3.3.1	Analisi di stabilità e convergenza	61
3.3.2	Lo splitting sull'operatore di diffusione trasporto	66
3.3.3	Gli schemi a passi frazionari applicati allo splitting sull'operatore di diffusione trasporto	69

3.3.4	Applicazione allo schema PR	72
3.3.5	Risultati numerici	77
II	Metodi di decomposizione di domini	87
4	Metodi iterativi fra sottodomini per problemi ellittici	89
4.1	Formulazione matematica ed approssimazione	90
4.2	Lo schema Projection Decomposition Method	93
4.2.1	Costruzione di una base ben-condizionata	97
4.2.2	PDM e l'approssimazione spettrale	98
4.2.3	Note sulla soluzione del sistema algebrico	101
4.2.4	L'algoritmo PDM e la sua parallellizzazione	102
4.2.5	Risultati Numerici	103
5	Il metodo degli elementi spettrali	111
5.1	Approssimazione del problema ellittico	111
5.2	Interpretazione algebrica	114
5.3	Il preconditionatore Schwarz additivo	117
III	L'equazione di Navier-Stokes	123
6	Il problema di Navier-Stokes	125
6.1	Formulazione variazionale	127
6.2	L'approssimazione spazio-tempo	128
6.2.1	Discretizzazione in tempo	131
6.2.2	Tecniche di stabilizzazione	132
6.3	Interpretazione algebrica	133
6.4	Risolutori e preconditionatori	137
6.4.1	Il preconditionatore basato sul metodo di Schwarz	138
6.4.2	Il preconditionatore senza sovrapposizione	142
6.5	Risultati numerici	143
6.5.1	Caso test: flusso all'interno di un canale con gradino	146
6.5.2	Caso test: flusso all'interno di un cuneo (Taneda 1979)	149
6.5.3	Caso test: flusso uniforme oltre un ostacolo	151
6.5.4	Caso test: cavità trascinata	153
6.5.5	Caso test: flusso oltre il cilindro circolare	153

Introduzione

Le equazioni di Navier-Stokes governano il moto di diversi tipi di fluidi, esprimendone la conservazione della quantità di moto e della massa, e si riscontrano nello studio di molti fenomeni fisici. Ciò rende molto interessante lo studio e l'analisi delle stesse, sia da un punto di vista puramente matematico, sia da un punto di vista numerico.

In questa tesi si è affrontato lo studio delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili viscosi in un dominio bidimensionale limitato.

Poichè tuttora non è possibile risolvere in termini esatti le equazioni di Navier-Stokes, se non limitatamente a situazioni estremamente particolari, si rivela di grande interesse la risoluzione di queste equazioni utilizzando schemi numerici e, in definitiva, mediante l'uso di un calcolatore. Una delle richieste fondamentali che si fa agli schemi numerici è che essi siano stabili ed accurati al fine di poter trattare problemi i cui parametri fisici abbiano valori realistici.

Per quanto riguarda l'approssimazione in spazio si propone il *metodo agli elementi spettrali*, con *tecniche di stabilizzazione* sullo stile di Franca e Hughes ([27], [26]) in alternativa a metodi di proiezione o a metodi basati su risolutori del campo di pressione. Per quanto riguarda l'approssimazione in tempo si è scelto di utilizzare *schemi alle differenze finite di tipo semiimplicito*, per poter ridurre la non-linearità del problema.

Il metodo agli elementi spettrali riflette da un lato l'alta accuratezza dei metodi spettrali (è ben noto che l'ordine di accuratezza della soluzione numerica dipende esclusivamente dalla regolarità della soluzione), e dall'altro la versatilità a trattare geometrie varie e complesse propria del metodo agli elementi finiti.

In questa tesi viene fatta una descrizione dei metodi spettrali, i quali rappresentano il nucleo attorno al quale si sviluppa tutto il discorso della nostra approssimazione, e vengono esposte le caratteristiche algebriche relative alle matrici ottenute da un'approssimazione spettrale.

La presentazione di questi metodi si colloca all'interno dell'approssimazione in dimensione finita del problema ellittico autoaggiunto: un problema modello semplice,

ma nello stesso tempo interessante per la possibilità, mediante opportuni schemi quali ad esempio il *metodo di proiezione* di Chorin e Temam, di poter ricondurre ad esso problemi più complessi tra cui anche le equazioni di Navier-Stokes.

In termini analoghi viene trattato anche il problema di diffusione trasporto, anch'esso visto come nucleo di base di uno schema numerico per la risoluzione di problemi più complessi.

Riguardo al problema di diffusione-transporto evolutivo vengono presentati gli schemi a passi frazionari (anche detti schemi *fractional step*), i quali si basano sulla possibilità di suddividere un intervallo temporale in due o più sottopassi e di vedere la soluzione del passo successivo come la somma di due o più soluzioni “particolari” relative ad una parte di operatore. L'operatore differenziale viene diviso in due o più operatori che riflettano fenomeni fisici ben distinti (per esempio l'equazione di diffusione-transporto viene scissa in una parte di diffusione ed in una di trasporto) oppure riflettenti una suddivisione a livello geometrico (lo schema delle *direzioni alternate -ADI* di Peaceman e Rachford ([53]) ne è un classico esempio).

In questa tesi si è fatta particolare attenzione a questi schemi, e se ne sono analizzate le proprietà di accuratezza e di stabilità al variare dei dati del problema, avendo adottato una suddivisione (o “splitting”) dell'operatore a livello differenziale. Questo significa che i sottoproblemi generati dalla suddivisione devono essere problemi differenziali ben definiti con proprie condizioni al bordo, compatibili con i dati del problema originario. A tal proposito, vengono proposti alcuni schemi, con diversi ordini di accuratezza.

Relativamente al problema ellittico autoaggiunto viene presentato un metodo di decomposizione di domini, basato sull'approssimazione mediante un metodo di proiezione di tipo Galerkin, dell'equazione di Stéklov-Poincaré all'interfaccia ([3], [51], [31]).

All'equazione di Stéklov-Poincaré si perviene dopo una opportuna interpretazione del problema differenziale originario multidomini, e risolvere tale equazione equivale a risolvere il problema multidomini assegnato.

L'operatore di Stéklov-Poincaré è un operatore illimitato e di conseguenza la matrice ottenuta da una sua discretizzazione può risultare molto mal condizionata. In questo schema il problema del malcondizionamento della matrice è affrontato costruendo una base di polinomi, definiti sull'interfaccia della decomposizione, “ben condizionati” nel senso di Mikhlin, ovvero, capaci di rendere il numero di condizionamento della matrice indipendente dal parametro di discretizzazione usato. Il sistema lineare sull'interfaccia viene risolto con il metodo del gradiente coniugato e, per il calcolo del residuo ad ogni passo, vengono utilizzati i metodi spettrali. Lo schema ha un'accuratezza di tipo spettrale e si rivela molto efficiente dal punto di

vista computazionale.

Un'alternativa ad uno schema multidomini è data dal metodo agli elementi spettrali, a patto di risolvere in maniera efficiente il sistema lineare che essi generano. Per la risoluzione del sistema lineare ottenuto dall'approssimazione agli elementi spettrali sono stati considerati metodi di tipo gradiente coniugato opportunamente preconditionati. In particolare si è utilizzato il metodo del Gradiente Coniugato, per problemi con matrice simmetrica e lo schema BiCGStab, una variante stabilizzata del metodo del Gradiente Coniugato per problemi con matrice non simmetrica.

Quale preconditionatore per un problema ellittico si è considerata una variante del *precondizionatore additivo di Schwarz*, ovvero un preconditionatore Schwarz completato con un *precondizionatore coarse* (sullo stile di Dryja e Widlund [24]), costruito su una discretizzazione con elementi spettrali bilineari.

Tale preconditionatore è stato esteso anche alle equazioni di Navier-Stokes sulle quali viene proposto anche un altro preconditionatore basato su una discretizzazione con elementi spettrali bilineari, ma non sugli elementi con sovrapposizione, bensì sugli elementi originari non sovrapposti. L'inversa di tale matrice è calcolata in termini delle inverse delle matrici locali, imponendo una condizione omogenea sulla componente normale del tensore degli sforzi sulle interfacce della decomposizione.

Riassumendo, sono state sviluppate principalmente le seguenti tematiche.

Sono stati proposti, nell'ambito degli schemi a passi frazionari applicati a problemi parabolici di diffusione trasporto, alcuni splitting originali in grado di preservare l'accuratezza e la convergenza degli schemi anche in presenza di condizioni al bordo non omogenee.

Viene proposta un'estensione al caso spettrale del metodo di proiezione dell'operatore di Stéklov-Poincaré proposto da Agoshkov e Ovtchinnikov, nell'ambito delle equazioni ellittiche autoaggiunte.

Sono state estese le tecniche di stabilizzazione di tipo SUPG, GALS e DW ai metodi agli elementi spettrali nell'ambito delle equazioni di diffusione trasporto e di Navier-Stokes per fluidi viscosi incompressibili. In particolare ciò ha consentito l'utilizzo di elementi spettrali dello stesso grado per l'approssimazione del campo di velocità e del campo di pressione.

Viene proposta una versione del preconditionatore Schwarz additivo, su una discretizzazione elementi spettrali bilineari, per l'equazione di Navier-Stokes, sullo stile del preconditionatore proposto da Dryja e Widlund per il problema di Poisson. Inoltre, sempre nell'ambito dell'equazione di Navier-Stokes, è stato proposto un preconditionatore agli elementi spettrali bilineari senza sovrapposizione degli elementi.

Diamo ora un breve riassunto del contenuto dei vari capitoli.

Nel primo capitolo vengono presentati i metodi spettrali all'interno dell'approssimazione, mediante il metodo di Galerkin generalizzato, di un problema ellittico autoaggiunto. Vengono presentati risultati numerici relativamente al preconditionamento della matrice spettrale con una matrice elementi spettrali bilineari.

Nel secondo capitolo viene presentata l'approssimazione numerica del problema di diffusione trasporto mediante i metodi spettrali e viene fatto cenno alle tecniche di stabilizzazione (quali Streamline Upwind/Petrov Galerkin, Galerkin Least Squares, Douglas Wang) per affrontare problemi a convezione dominante.

Nel terzo capitolo vengono presentati alcuni schemi *fractional step* sul problema di diffusione trasporto evolutivo, quali Peaceman-Rachford, Douglas-Rachford e θ -metodo. In tutti e tre i metodi l'operatore differenziale ellittico viene suddiviso in una parte puramente diffusiva ed in una parte di trasporto. Tali schemi sono stati considerati anche come metodi iterativi per l'approssimazione di problemi stazionari e vengono presentati alcuni risultati numerici relativi.

Nel quarto capitolo viene presentato lo schema multidomini di proiezione PDM applicato a metodi spettrali ([31]), e vengono forniti vari risultati numerici dimostranti l'efficienza numerica e computazionale del metodo. Inoltre viene fornito un confronto con lo schema di decomposizione di domini Dirichlet/Neumann ([48], [54], [55]).

Nel quinto capitolo viene presentato il metodo agli elementi spettrali relativamente ai problemi ellittici. Vengono analizzate le proprietà algebriche della matrice elementi spettrali e viene presentata una variante del preconditionatore Schwarz additivo con discretizzazione agli elementi spettrali bilineari.

Il sesto capitolo è dedicato alle equazioni di Navier Stokes per fluidi incomprimibili viscosi approssimato con elementi spettrali e stabilizzato con le tecniche di stabilizzazione (GALS, SUPG, DW). Sono presentati i preconditionatori di cui si è accennato sopra e i risultati numerici mostranti l'accuratezza degli schemi utilizzati e le buone proprietà dei preconditionatori utilizzati. Infine vengono riportati risultati delle simulazioni numeriche di numerosi casi test noti in letteratura.

Ringrazio il professor Alfio Quarteroni che ha seguito il mio lavoro in questi anni, aiutandomi a superare le difficoltà di volta in volta incontrate.

Desidero inoltre ringraziare:

il Dipartimento di Matematica dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, sede di Brescia per la possibilità che mi è stata offerta di poter sfruttare le risorse del centro di calcolo negli anni successivi alla laurea, un grazie particolare al prof. Gianni Sacchi, a Cristina ed a Franco;

il CRS4 (Centro di Ricerca, Sviluppo e Studi Superiori in Sardegna) e tutte le persone che ivi erano presenti negli anni 1992/93 (tra cui il prof. Alfio Quarteroni, il prof. V.I. Agoshkov, Lorenzo, Cristiano, Evgeni, Giorgio, Anna, Fabio, Luca, Marco, Daniela, Simona e Antoine) per la positiva e costruttiva esperienza di ricerca vissuta;

il professor Alberto Valli ed il dottor E.I. Ovtchinnikov per avermi introdotto ad alcuni degli argomenti di questa tesi e per avermi assistito nella ricerca;

Fausto e la mia famiglia per essermi sempre stati vicini.

Parte I
Problemi lineari

Capitolo 1

Operatori ellittici autoaggiunti

In questo capitolo sono presentati i problemi ai limiti sui cui si è basato questo lavoro ed in particolare è presentatata l'approssimazione spettrale, secondo il metodo “Galerkin Generalizzato”, degli stessi.

Su un dominio quadrangolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato con bordo $\partial\Omega$, è assegnato il problema di determinare la funzione u tale che

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nu\nabla u) + b_0 u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega_D \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (1.1)$$

dove la funzione $\nu(x, y)$ definita su Ω a valori positivi in \mathbb{R} e limitata è detta viscosità, la funzione $b_0(x, y)$ definita su Ω è limitata e non negativa (non nulla se $\partial\Omega_D \equiv \emptyset$), f , g e h sono opportuni dati assegnati. Con $\partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_N$ sono state denotate due parti del bordo $\partial\Omega$ su cui sono state assegnate rispettivamente condizioni di tipo Dirichlet e di Neumann e tali che $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$ e $\overline{\partial\Omega_D} \cup \overline{\partial\Omega_N} = \overline{\partial\Omega}$. Infine n rappresenta il versore normale a $\partial\Omega$ con verso uscente (si veda la Fig. 1).

Sia ora Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ e sia \mathbf{x} un punto di Ω . Si denotano:

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili} : \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega < \infty\} \quad (1.2)$$

munito della norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right)^{1/2}; \quad (1.3)$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate a meno di insiemi di misura nulla}\} \quad (1.4)$$

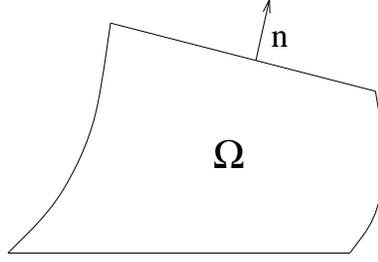


Figura 1.1: Il dominio computazionale

munito della norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{(x,y) \in \Omega} |u(\mathbf{x})|; \quad (1.5)$$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D_j v \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n\} \quad (1.6)$$

dove $D_j v$ per $j = 1, \dots, n$ rappresenta la derivata in senso distribuzionale e $\nabla u = [D_j v]_{j=1, \dots, n}$, munito della norma

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Quale caso particolare del teorema delle tracce ($s = 1$) (si vedano [7],[43]) si definisce l'*operatore di traccia* quale unica mappa continua γ definita su $H^1(\Omega)$:

$$\gamma v = v|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (1.8)$$

con Ω aperto in \mathbb{R}^2 di bordo $\partial\Omega$ continuo e lipschitziano. Si definisce

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{\gamma v : v \in H^1(\Omega)\}. \quad (1.9)$$

Se Σ è un sottoinsieme continuo e lipschitziano di $\partial\Omega$ si definisce *operatore di traccia* γ_Σ l'operatore definito su $H^1(\Omega)$ per cui:

$$\gamma_\Sigma v = v|_\Sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (1.10)$$

e si pone

$$H^{1/2}(\Sigma) = \{\gamma_\Sigma v : v \in H^1(\Omega)\}. \quad (1.11)$$

Per maggiori dettagli si vedano [1], [7], [43].

Preso infine $\Sigma \subset \partial\Omega$ si definisce *operatore di estensione* una mappa continua $E_\Sigma : H^{1/2}(\Sigma) \rightarrow H^1(\Omega)$ tale che: $\gamma_\Sigma E_\Sigma \varphi = \varphi, \forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Preso $g \in H^{1/2}(\Sigma)$, con $\Sigma \subset \partial\Omega$ si può definire lo spazio seguente:

$$H_{g,\Sigma}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_\Sigma u = g\} \quad (1.12)$$

e denotare, per $g \equiv 0$,

$$H_0^1(\Omega) = H_{0,\partial\Omega}^1(\Omega) \quad (1.13)$$

Posto $V = H_{0,\partial\Omega_D}^1(\Omega)$, presi $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega_N)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega_D)$, la formulazione variazionale del problema (1.1) è :

$$\text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ con } (u - E_{\partial\Omega_D} g) \in V : \quad (1.14)$$

$$a(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V$$

dove:

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad a(u, v) := \int_{\Omega} (\nu \nabla u \cdot \nabla v + b_0 uv) \, d\Omega \quad (1.15)$$

è una forma bilineare continua e coerciva, cioè
(*continuità*)

$$\exists a^0 > 0 : \quad |a(u, v)| \leq a^0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.16)$$

e

(*coercività*)

$$\exists a_0 > 0 : \quad a(u, u) \geq a_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.17)$$

mentre

$$\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} h v \, d(\partial\Omega) \quad (1.18)$$

è un funzionale lineare e continuo, ovvero

$$\exists C_{\mathcal{F}} > 0 : \quad |\mathcal{F}(v)| \leq C_{\mathcal{F}} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.19)$$

Per il Lemma di Lax-Milgram (si veda ad esempio [57]) il problema (1.14) ammette una unica soluzione tale che

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{a_0} \|\mathcal{F}\|_{V'}, \quad (1.20)$$

essendo V' lo spazio duale di V .

Si denota con ν_0 la costante di ellitticità associata alla forma bilineare a (1.15), ovvero

$$\nu_0 = \min_{(x,y) \in \Omega} \nu(x, y). \quad (1.21)$$

Per semplicità di esposizione supporremo d'ora innanzi che $g \equiv 0$ su $\partial\Omega_D$.

1.1 Il metodo di Galerkin e Galerkin generalizzato

Nell'ipotesi che $\{V_h, h > 0\}$ sia una famiglia di sottospazi di dimensione finita in V tali che

$$\forall v \in V \quad \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0, \quad (1.22)$$

la formulazione in dimensione finita del problema (1.14), secondo il metodo di Galerkin, si legge:

$$\text{trovare } u_h \in V_h \quad : \quad a(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.23)$$

Per il lemma di Lax Milgram esiste unica soluzione u_h del problema (1.23), con

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{a_0} \|\mathcal{F}\|_{V'} \quad (1.24)$$

e, se u è la soluzione del problema continuo (1.14), si ha:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{a_0}{a_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.25)$$

Una versione più interessante del metodo di Galerkin è fornita dal cosiddetto *metodo di Galerkin generalizzato*, nel quale la forma bilineare a ed il funzionale \mathcal{F} vengono approssimati opportunamente da una forma bilineare discreta a_h e da un funzionale lineare discreto \mathcal{F}_h , generalmente ottenuti sostituendo gli integrali con opportune formule di quadratura.

Secondo il metodo di Galerkin generalizzato la formulazione in dimensione finita del problema (1.14) diventa:

$$\text{trovare } u_h \in V_h \quad : \quad a_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.26)$$

dove $\{V_h, h > 0\}$ è una famiglia di sottospazi di dimensione finita in V verificanti la condizione (1.22).

Teorema 1.1 Sia a_h una forma bilineare uniformemente coerciva su $V_h \times V_h$, ovvero $\exists a^* > 0$ e indipendente da h tale che

$$a_h(v_h, v_h) \geq a^* \|v_h\|_V^2 \quad \forall v_h \in V_h, \quad (1.27)$$

e sia \mathcal{F}_h un funzionale lineare discreto. Allora esiste unica la soluzione u_h del problema (1.23) tale che

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{a^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\mathcal{F}_h(v_h)}{\|v_h\|_V} \quad (1.28)$$

e, se u è la soluzione del problema continuo (1.14), si ha

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V \leq & \inf_{\substack{z_{\mathcal{T}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{T}} \\ r_{\mathcal{T}} \in \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}}} \left[\left(1 + \frac{a^0}{a^*}\right) \|u - w_h\|_V + \frac{1}{a^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|_V} \right] \\ & + \frac{1}{a^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|\mathcal{F}(v_h) - \mathcal{F}_h(v_h)|}{\|v_h\|_V}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Questo risultato è noto come *Lemma di Strang*. Per la dimostrazione si vedano ad esempio [20], [57].

Osservazione 1.1 Nell'ambito di un'approssimazione di tipo elementi finiti, il parametro h rappresenta il diametro degli elementi in questione. Come si vedrà, in ambito spettrale il parametro h è legato ad un parametro intero N (grado di interpolazione) tale che $h \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$ ed è consuetudine denotare la dimensione finita del problema con l'indice N . In ambito elementi spettrali il parametro h dipende da due grandezze: il grado di interpolazione spettrale N ed il diametro H degli elementi spettrali.

1.2 L'Approssimazione Spettrale

Per una completa presentazione dei metodi spettrali riferiamo a [11], [5] ed alle referenze in essi citate. In questa sede ci si limiterà a delinare i fondamenti del metodo ed a definire i parametri di cui si farà maggior uso in seguito.

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ denotiamo con $\mathbb{P}_N(I)$ lo spazio dei polinomi algebrici di grado minore o uguale a N definiti su I ed a valori in \mathbb{R} ; mentre per $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ denotiamo con $\mathbb{Q}_N(\Omega)$ lo spazio dei polinomi definiti su Ω di grado minore od uguale a N in ciascuna variabile.

In base all'osservazione (1.1) utilizziamo al posto dell'indice h , introdotto nello schema di Galerkin generalizzato, l'indice N , poniamo $\hat{\Omega} = (-1, 1)^2$ e definiamo lo spazio di dimensione finita $V_N = V \cap \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$.

Nell'ipotesi che la famiglia di sottospazi $\{V_N, N \in \mathbb{N}\}$ di V soddisfi alla condizione (1.22), che la forma bilineare a_N (approssimazione opportuna della forma bilineare a) sia uniformemente coerciva su $V_N \times V_N$ e che \mathcal{F}_N (approssimazione opportuna di \mathcal{F}) sia un funzionale lineare su V_N , l'approssimazione u_N della soluzione u del problema (1.14) è la soluzione del problema seguente ([57], Cap. 5):

$$\text{trovare } u_N \in V_N : \quad a_N(u_N, v_N) = \mathcal{F}_N(v_N) \quad \forall v_N \in V_N. \quad (1.30)$$

Analizziamo dapprima la forma bilineare discreta a_N ed il funzionale \mathcal{F}_N . Essi derivano dalla scelta di discretizzare gli integrali in (1.15) e (1.18) mediante formule di quadratura di tipo gaussiano.

1.2.1 Formule di quadratura di tipo gaussiano

Per ogni funzione f misurabile in $(-1, 1)$ si definisce la formula di quadratura di tipo gaussiano come segue:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \, d\xi \simeq \sum_{i=1}^{N+1} f(\xi_i) \gamma_i, \quad (1.31)$$

dove i valori $\{\xi_i\}_{i=1}^{N+1}$ e $\{\gamma_i\}_{i=1}^{N+1}$ sono detti rispettivamente nodi e pesi delle formule di quadratura. Qualora i nodi $\{\xi_i\}$ siano definiti come

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_{N+1} = 1, \quad \text{e } \xi_i \ (i = 2, \dots, N) \text{ sono gli zeri di } L'_N \quad (1.32)$$

ed i pesi siano

$$\gamma_i = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(\xi_i)]^2} \quad i = 1, \dots, N+1, \quad (1.33)$$

si ottengono le formule di quadratura di Legendre Gauss-Lobatto (LGL). $L_N(x)$ denota il polinomio di Legendre di grado N definito su $(-1, 1)$ (si veda [11]) e $L'_N(x)$ la sua derivata prima.

È ben noto che la formula di quadratura (1.31) ha grado di precisione $(2N-1)$ (si veda [21]), ovvero:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^{N+1} p(\xi_i) \gamma_i \quad \forall p(x) \in \mathbb{P}_{2N-1}(-1, 1). \quad (1.34)$$

Le formule di quadratura gaussiane sul dominio bidimensionale di riferimento $\hat{\Omega} = (-1, 1)^2$ vengono derivate direttamente dalla (1.31):

$$\int_{\hat{\Omega}} f(\xi, \eta) \, d\Omega \simeq \sum_{i=1}^{N+1} \left(\sum_{j=1}^{N+1} f(\xi_i, \eta_j) \gamma_j \right) \gamma_i. \quad (1.35)$$

I nodi (ξ_i, η_j) per $i, j = 1, \dots, N + 1$ sono ottenuti mediante prodotto cartesiano degli insiemi $\{\xi_i\}_{i=1}^{N+1}$ e $\{\eta_j\}_{j=1}^{N+1}$ e si denota con $\hat{\mathcal{M}}_N = \{(\xi_i, \eta_j), i, j = 1, N + 1\}$ l'insieme dei nodi LGL definiti su $\hat{\Omega}$ e con ω_{ij} il prodotto $\omega_{ij} = \gamma_i \gamma_j$, per $i, j = 1, \dots, N + 1$. D'ora innanzi (ξ_i, η_j) rappresenteranno i nodi LGL in $\hat{\Omega}$.

Osservazione 1.2 Quando il dominio computazionale Ω è un dominio quadrangolare in \mathbb{R}^2 , ed è l'immagine mediante una mappa invertibile del quadrato di riferimento $\hat{\Omega}$ cioè,

$$\exists \mathbf{F} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega \text{ tale che } \quad \forall (\xi, \eta) \in \hat{\Omega} \quad \mathbf{F}(\xi, \eta) = (x, y), \quad \text{con } (x, y) \in \Omega \quad (1.36)$$

e con Jacobiano $J_{\mathbf{F}}$, la (1.35) diventa:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} f(\mathbf{F}(\xi, \eta)) |\det J_{\mathbf{F}}(\xi, \eta)| \, d\hat{\Omega} \quad (1.37)$$

$$\simeq \sum_{i,j=1}^{N+1} f(\mathbf{F}(\xi_i, \eta_j)) \omega_{ij} |\det J_{\mathbf{F}}(\xi_i, \eta_j)|. \quad (1.38)$$

Inoltre, se Σ rappresenta un lato del bordo $\partial\Omega$ ed esiste una mappa invertibile $\mathbf{g} : (-1, 1) \rightarrow \Sigma$ t.c. $\mathbf{g}(\xi) = (x, y)$, allora si ha:

$$\int_{\Sigma} f(x, y) \, d\partial\Omega = \int_{-1}^1 f(\mathbf{g}(\xi)) |\mathbf{g}'(\xi)| \, d\xi \simeq \sum_{k=1}^{N+1} f(\mathbf{g}(\xi_k)) |\mathbf{g}'(\xi_k)| \gamma_k. \quad (1.39)$$

D'ora innanzi se non verrà diversamente specificato, supporremo che Ω sia un dominio aperto di forma quadrangolare in \mathbb{R}^2 per il quale esiste la mappa invertibile \mathbf{F} sopra definita.

Si denota con

$$\mathcal{M}_N = \{(x_i, y_j) = \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j), \quad i, j = 1, \dots, N + 1\} \quad (1.40)$$

l'insieme delle immagini dei nodi LGL sul dominio Ω . Si veda la Fig 1.2 \square

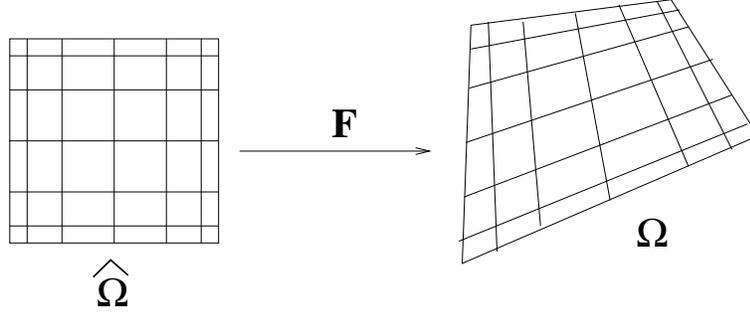


Figura 1.2: Il dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ e il dominio Ω immagine di $\hat{\Omega}$ mediante la mappa \mathbf{F}

Quindi si definisce il prodotto scalare discreto LGL in $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$:

$$(u, v)_{N,\Omega} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} u(x_i, y_j) v(x_i, y_j) \omega_{ij} |\det \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\xi_i, \eta_j)|, \quad (1.41)$$

il prodotto scalare discreto LGL in $\mathcal{C}^0(\bar{\Sigma})$:

$$(u, v)_{N,\Sigma} = \sum_{k=1}^{N+1} u(\mathbf{g}(\xi_k)) v(\mathbf{g}(\xi_k)) \gamma_k |\mathbf{g}'(\xi_k)| \quad (1.42)$$

e la norma $\|u\|_N = \sqrt{(u, u)_{N,\Omega}}$.

Si ha la seguente stima ([57]):

$$\|u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_N\|_N \leq 3 \|u_N\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega) \quad (1.43)$$

e vale la disuguaglianza discreta di Cauchy-Schwarz:

$$(u, v)_{N,\Omega} \leq \|u\|_N \|v\|_N. \quad (1.44)$$

La forma bilineare discreta a_N viene quindi definita come:

$$a_N(u_N, v_N) = (\nu \nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + (b_0 u_N, v_N)_{N,\Omega} \quad \forall u_N, v_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega) \quad (1.45)$$

ed il funzionale discreto \mathcal{F}_N come:

$$\mathcal{F}_N(v_N) = (f, v_N)_{N,\Omega} + (h, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \quad \forall v_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega). \quad (1.46)$$

Lemma 1.1

$$[(\nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + (u_N, v_N)_{N,\Omega}] \leq 9 \|u_N\|_{H^1(\Omega)} \|v_N\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.47)$$

Dimostrazione. Utilizzando la seconda disuguaglianza in (1.43) e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$\|u_N\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v_N\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{81} [(u_N, v_N)_{N,\Omega} + (\nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega}]^2 + (\|\nabla u_N\|_N \|v_N\|_N - \|\nabla v_N\|_N \|u_N\|_N)^2 \quad (1.48)$$

$$\geq \frac{1}{81} ((u_N, v_N)_{N,\Omega} + (\nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega})^2 \quad (1.49)$$

da cui la tesi. \square

Teorema 1.2 La forma bilineare a_N è continua e uniformemente coerciva su $V_N \times V_N$.

Dimostrazione. Dal lemma (1.1) segue immediatamente la continuità della forma bilineare a_N su $V_N \times V_N$, infatti:

$$|a_N(u_N, v_N)| \leq (\|\nu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|b_0\|_{L^\infty(\Omega)}) |(\nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + (u_N, v_N)_{N,\Omega}| \quad (1.50)$$

$$\leq 9 (\|\nu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|b_0\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u_N\|_{H^1(\Omega)} \|v_N\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.51)$$

Dalla prima disuguaglianza in (1.43) si ottiene la uniforme coercività, infatti:

$$\begin{aligned} a_N(u_N, u_N) &\geq \min_{\Omega} \{\nu, b_0\} [(\nabla u_N, \nabla u_N)_{N,\Omega} + (u_N, u_N)_{N,\Omega}] \\ &= \min_{\Omega} \{\nu, b_0\} [\|\nabla u_N\|_N^2 + \|u_N\|_N^2] \\ &\geq \min_{\Omega} \{\nu, b_0\} \|u_N\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

\square

1.2.2 Proiezione di Legendre

Sia $\{L_k(\xi), k \geq 0\}$ la famiglia di polinomi di Legendre definiti sull'intervallo $(-1, 1)$ (si veda [21] ad esempio). Tali polinomi sono ortogonali rispetto alla funzione peso $\omega(x) \equiv 1$ nel prodotto scalare dello spazio $L^2(-1, 1)$ e costituiscono un sistema di

funzioni ortogonali e linearmente indipendenti in $L^2(-1, 1)$, così che ogni funzione $u \in L^2(-1, 1)$ possa essere espressa come combinazione lineare di questi polinomi:

$$u(\xi) = \sum_{k \geq 0} \hat{u}_k L_k(\xi). \quad (1.53)$$

In $\hat{\Omega}$ si definiscono i polinomi di Legendre in due dimensioni mediante un prodotto tensoriale:

$$L_{km}(\xi, \eta) = L_k(\xi) L_m(\eta) \quad k, m \in \mathbb{N} \quad (1.54)$$

e quindi una funzione $u \in L^2(\hat{\Omega})$ può essere scritta come:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{k, m \geq 0} \hat{u}_{km} L_{km}(\xi, \eta) \quad (1.55)$$

con $\hat{u}_{km} = (k + \frac{1}{2})(m + \frac{1}{2})(u, L_{km})_{L^2(\hat{\Omega})}$. Denotiamo con $\mathcal{P}_N : L^2(\hat{\Omega}) \rightarrow \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$ l'operatore di proiezione ortogonale rispetto al prodotto scalare in $L^2(\hat{\Omega})$:

$$\forall u \in L^2(\hat{\Omega}), \quad \mathcal{P}_N u(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_{km} L_{km}(\xi, \eta) \quad (1.56)$$

e con $\mathcal{P}_{1,N} : H^1(\hat{\Omega}) \rightarrow \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$ l'operatore di proiezione ortogonale rispetto al prodotto scalare in $H^1(\hat{\Omega})$ t.c.

$$\forall u \in H^1(\hat{\Omega}) \quad (\mathcal{P}_{1,N} u, v_N)_{H^1(\hat{\Omega})} = (u, v_N)_{H^1(\hat{\Omega})} \quad \forall v_N \in \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega}). \quad (1.57)$$

Si hanno le seguenti stime ([14], [11])

$$\forall u \in H^s(\hat{\Omega}), \quad s \geq 0 \quad \|u - \mathcal{P}_N u\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq CN^{-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})} \quad (1.58)$$

e

$$\forall u \in H^s(\hat{\Omega}), \quad s \geq 1 \quad \|u - \mathcal{P}_{1,N} u\|_{H^k(\hat{\Omega})} \leq CN^{k-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})} \quad k = 0, 1 \quad (1.59)$$

dove con $H^s(\hat{\Omega})$, ($s \in \mathbb{R}$) è stato denotato lo spazio di Sobolev di indice s ([43]).

1.2.3 Interpolazione di Legendre

Spesso al posto del proiettato $\mathcal{P}_{1,N}u$ si considera l'interpolato $I_N u$ di una funzione continua $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definito come

$$I_N u(\xi) = \sum_{k=0}^N u_k^* L_k(\xi) \quad (1.60)$$

dove $L_k(\xi)$ denota sempre il polinomio di Legendre di grado k definito sull'intervallo $(-1, 1)$ e dove $u_k^* = (u, L_k)_{N,\hat{\Omega}}$ sono i coefficienti così definiti:

$$u_k^* = \begin{cases} \frac{2k+1}{N(N+1)} \sum_{j=0}^N u(\xi_j) L_k(\xi_j) \frac{1}{L_N'(\xi_j)} & k = 0, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N u(\xi_j) \frac{1}{L_N'(\xi_j)} & k = N. \end{cases} \quad (1.61)$$

In due dimensioni il polinomio interpolante di una funzione $u : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ viene definito nel seguente modo:

$$I_N u(\xi, \eta) = \sum_{k,m=0}^N u_{km}^* L_{km}(\xi, \eta) \quad (1.62)$$

dove $u_{km}^* = u_k^* u_m^*$, $k, m = 0, \dots, N$.

Si ha la seguente stima ([5]):

$$\forall u \in H^s(\hat{\Omega}), \quad s \geq 2 \quad \|u - I_N u\|_{H^k(\hat{\Omega})} \leq CN^{k-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})} \quad k = 0, 1, \quad (1.63)$$

mentre per $I \equiv (-1, 1)$ si ha ([5]):

$$\forall u \in H^s(I), \quad s \geq 1 \quad \|u - I_N u\|_{H^k(I)} \leq CN^{k-s} \|u\|_{H^s(I)} \quad k = 0, 1. \quad (1.64)$$

Si ha il seguente teorema, generalizzazione di risultati noti in ([5], [14]).

Teorema 1.3 Si consideri il problema (1.30)-(1.45)-(1.46) definito sul dominio $\hat{\Omega}$, sia $s \geq 1$, $r \geq 2$, e $p \geq 1$. Siano $f \in H^r(\hat{\Omega})$, $h \in H^p(\partial\hat{\Omega}_N)$, $b_0, \nu \in W^{s-1,\infty}$ e $u \in H^s(\hat{\Omega}) \cap H_{0,\partial\hat{\Omega}_D}^1(\hat{\Omega})$. Allora $\exists C > 0$ indipendente da N tale che

$$\|u - u_N\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C \left[(N-1)^{1-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})} + N^{-r} \|f\|_{H^r(\hat{\Omega})} + N^{-p} \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \|h\|_{H^p(l_k)} \right] \quad (1.65)$$

Dimostrazione. Dall'uniforme coercività della forma discreta a_N (1.52) e per il Lemma di Strang (Teorema 1.1) vale la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{H^1(\hat{\Omega})} &\leq \inf_{\substack{z_{\mathcal{H}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \\ r_{\mathcal{H}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}}} w_N \in V_N \left[\left(1 + \frac{a^0}{a^*} \right) \|u - w_N\|_{H^1(\hat{\Omega})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{a^*} \sup_{\substack{v_N \in V_N \\ v_N \neq 0}} \frac{|a(w_N, v_N) - a_N(w_N, v_N)|}{\|v_N\|_{H^1(\hat{\Omega})}} \right] + \frac{1}{a^*} \sup_{\substack{v_N \in V_N \\ v_N \neq 0}} \frac{|\mathcal{F}(v_N) - \mathcal{F}_N(v_N)|}{\|v_N\|_{H^1(\hat{\Omega})}}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Prendendo $w_N = I_{N-1}u$, ovvero il polinomio di grado $N - 1$ in ogni variabile e interpolante la funzione u nei nodi LGL, per la stima (1.63) e per le ipotesi su u , si ha:

$$\|u - w_N\|_{H^1(\hat{\Omega})} = \|u - I_{N-1}u\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C(N - 1)^{1-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})}. \quad (1.67)$$

Inoltre per $v_N \in V_N$ e $w_N = I_{N-1}u$ si ha

$$\begin{aligned} |a(w_N, v_N) - a_N(w_N, v_N)| &\leq \max_{\hat{\Omega}} \{ \|\nu\|_{L^\infty(\hat{\Omega})} \|b_0\|_{L^\infty(\hat{\Omega})} \} \\ \left| \int_{\hat{\Omega}} \nabla v_N \cdot \nabla I_{N-1}u \, d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} v_N I_{N-1}u \, d\Omega - (\nabla v_N, \nabla I_{N-1}u)_{N, \hat{\Omega}} - (v_N, I_{N-1}u)_{N, \hat{\Omega}} \right| &= 0, \end{aligned} \quad (1.68)$$

per il grado di precisione $2N - 1$ delle formule di quadratura di LGL.

Per quanto riguarda il terzo addendo della disuguaglianza in (1.66) si ha

$$\begin{aligned} &|\mathcal{F}(v_N) - \mathcal{F}_N(v_N)| \\ &= \left| \int_{\hat{\Omega}} f v_N \, d\Omega + \int_{\partial \hat{\Omega}_N} h v_N \, d\partial\Omega - (f, v_N)_{N, \hat{\Omega}} - (h, v_N)_{N, \partial \hat{\Omega}_N} \right| \\ &\leq \left| \int_{\hat{\Omega}} f v_N \, d\Omega + \int_{\partial \hat{\Omega}_N} h v_N \, d\partial\Omega \right| + \left| (f, v_N)_{N, \hat{\Omega}} + (h, v_N)_{N, \partial \hat{\Omega}_N} \right|. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Sia $I_{N-1}f$ il polinomio di grado $N - 1$ in ogni variabile interpolante f sulla griglia LGL e sia $\tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k})$ il polinomio di grado $N - 1$ interpolante la restrizione della

funzione h al lato l_k della frontiera $\partial\Omega_N$, per la disuguaglianza discreta di Cauchy-Schwarz (1.44), per la seconda disuguaglianza in (1.43), per la disuguaglianza triangolare e per le stime (1.63) e (1.64) il termine in (1.69) è:

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \int_{\hat{\Omega}} (f - I_{N-1}f)v_N \, d\Omega \right| + \left| (I_{N-1}f - I_N f, v_N)_{N, \hat{\Omega}} \right| + \\
& \quad \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \left| \int_{l_k} (h - \tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k}))v_N \, d\partial\Omega \right| + \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \left| (h - \tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k}), v_N)_{N, l_k} \right| \\
& \leq \|f - I_{N-1}f\|_{L^2(\hat{\Omega})} \|v_N\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \|I_{N-1}f - f\|_{N, \hat{\Omega}} \|v_N\|_{N, \hat{\Omega}} \\
& \quad + \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \left[\|h - \tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k})\|_{L^2(l_k)} \|v_N\|_{L^2(l_k)} \right] + \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \left[\|h - \tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k})\|_{N, l_k} \|v_N\|_{N, l_k} \right] \\
& \leq \left[\|f - I_{N-1}f\|_{L^2(\hat{\Omega})} + 3\|I_N f - f\|_{L^2(\hat{\Omega})} \right] 3\|v_N\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \\
& \quad + \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \sqrt{3} \left[\|h - \tilde{I}_{N-1}(h|_{l_k})\|_{L^2(l_k)} + \sqrt{3}\|h - \tilde{I}_N(h|_{l_k})\|_{L^2(\hat{\Omega})} \right] \|v_N\|_{L^2(l_k)} \\
& \leq C_1 N^{-r} \|f\|_{H^r(\hat{\Omega})} \|v_N\|_{L^2(\hat{\Omega})} + C_2 N^{-p} \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \|h\|_{H^p(l_k)} \|v_N\|_{L^2(l_k)},
\end{aligned}$$

da cui, dividendo per $\|v_N\|_{H^1(\hat{\Omega})}$ si ottiene

$$\frac{|\mathcal{F}(v_N) - \mathcal{F}_N(v_N)|}{\|v_N\|_{H^1(\hat{\Omega})}} \leq C \left[N^{-r} \|f\|_{H^r(\hat{\Omega})} + N^{-p} \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \|h\|_{H^p(l_k)} \right]. \quad (1.70)$$

Sommando i tre termini (1.67), (1.68) e (1.70) si ottiene la tesi:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C \left[(N-1)^{1-s} \|u\|_{H^s(\hat{\Omega})} + N^{-r} \|f\|_{H^r(\hat{\Omega})} + N^{-p} \sum_{l_k \in \partial\hat{\Omega}_N} \|h\|_{H^p(l_k)} \right]. \quad (1.71)$$

□

Si osserva che all'interno delle formule di quadratura di Legendre Gauss Lobatto, si richiede la conoscenza dei valori delle funzioni integrande nei nodi stesi LGL. Risulta quindi opportuno avere una rappresentazione del polinomio interpolante $I_N u$ rispetto alla base di Lagrange riferita ai nodi LGL, cioè avere:

$$I_N u(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u(\xi_i, \eta_j) \hat{\varphi}_{ij}(\xi, \eta) \quad (1.72)$$

dove i polinomi $\{\hat{\varphi}_{ij}\}_{i,j=1}^{N+1}$ in $\mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$ sono tali che

$$\hat{\varphi}_{ij}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}_i(\xi) \hat{\varphi}_j(\eta) \text{ e } \hat{\varphi}_i(\xi_k) = \delta_{ki}, \quad \hat{\varphi}_j(\eta_m) = \delta_{mj}, \quad (1.73)$$

e dove i polinomi $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^{N+1}$ sono i polinomi di Lagrange di grado N definiti sull'intervallo $(-1, 1)$.

Si ha la seguente relazione tra i coefficienti u_{km}^* dati in (1.62) ed i coefficienti $u_{ij} = u(\xi_i, \eta_j)$ presenti in (1.72):

$$u_{ij} = \sum_{k,m=0}^N u_{km}^* L_{km}(\xi_i, \eta_j) \quad i, j = 1, \dots, N+1, \quad (1.74)$$

relazione nota come *Trasformata discreta di Legendre*.

Esprimendo le funzioni di base di Lagrange in termini dei polinomi di Legendre e dei nodi LGL si ha per $\xi \neq \xi_i$ e $\eta \neq \eta_j$:

$$\hat{\varphi}_{ij}(\xi, \eta) = \frac{1}{N^2(N+1)^2} \frac{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}{(\xi-\xi_i)(\eta-\eta_j)} \frac{L'_N(\xi)L'_N(\eta)}{L_N(\xi_i)L_N(\eta_j)}. \quad (1.75)$$

Osservazione 1.3 Sia (ξ, η) un generico punto in $\hat{\Omega}$ e sia (x, y) la sua immagine mediante \mathbf{F} in Ω . Data una funzione $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, immagine mediante una mappa invertibile \mathbf{F} (1.36) del dominio di riferimento $\hat{\Omega}$), il suo polinomio interpolante viene così definito:

$$I_N u(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u(x_i, y_j) \varphi_{ij}(x, y) \quad (1.76)$$

dove $\{\varphi_{ij}(x, y)\}$ sono le funzioni di base di Lagrange, definite su Ω relativamente ai nodi LGL $(x_i, y_j) \in \mathcal{M}_N$, per le quali si ha che

$$\varphi_{ij}(x, y) = \hat{\varphi}_{ij}(\mathbf{F}^{-1}(x, y)) = \hat{\varphi}_{ij}(\xi, \eta). \quad (1.77)$$

Nel caso in cui le componenti F_1 e F_2 della mappa \mathbf{F} siano dello stesso tipo delle funzioni di base $\hat{\varphi}_{ij}$ definite su $\hat{\Omega}$, ovvero $F_1, F_2 \in \mathbb{Q}_N(\hat{\Omega})$, allora \mathbf{F} è detta *trasformazione isoparametrica*.

In questa tesi sono state considerate le trasformazioni di Gordon and Hall ([30]), secondo cui la mappa \mathbf{F} viene espressa in funzione delle mappe invertibili $\boldsymbol{\pi}_i : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (per $i = 1, 4$) che definiscono i quattro lati del dominio computazionale Ω . La trasformazione di Gordon and Hall utilizzata è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi, \eta) = & \frac{1-\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_1(\xi) + \frac{1+\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_3(\xi) + \\ & \frac{1-\xi}{2} \left[\boldsymbol{\pi}_4(\eta) - \frac{1+\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_4(1) - \frac{1-\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_4(-1) \right] + \\ & \frac{1+\xi}{2} \left[\boldsymbol{\pi}_2(\eta) - \frac{1+\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_2(1) - \frac{1-\eta}{2}\boldsymbol{\pi}_2(-1) \right]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Chiedere che la trasformazione (1.78) sia isoparametrica equivale a chiedere che i lati del dominio Ω possano essere parametrizzati con polinomi dello stesso grado delle funzioni di base in $\hat{\Omega}$. \square

1.2.4 Derivazione di Legendre

Calcolare la derivata pseudospettrale di una funzione continua $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ vuol dire calcolare il polinomio $(I_N u)' \in \mathbb{P}_{N-1}(-1, 1)$:

$$(I_N u)'(\xi) = \sum_{k=0}^N u_k^* L_k'(\xi). \quad (1.79)$$

Per la rappresentazione (1.72) e per la scrittura delle funzioni $\hat{\varphi}_{ij}$ in termini dei polinomi di Legendre (1.75), la derivata pseudospettrale della funzione continua u è:

$$\partial_N u(\xi) = \sum_{i=1}^{N+1} u_i \hat{\varphi}_i'(\xi) \quad (1.80)$$

e

$$\partial_N u(\xi_j) = \sum_{i=1}^{N+1} u_i \hat{\varphi}_i'(\xi_j). \quad (1.81)$$

La matrice quadrata di dimensione $(N + 1)$

$$(D_N)_{ji} = \hat{\varphi}'_i(\xi_j) \quad i, j = 1, \dots, N + 1 \quad (1.82)$$

è detta *matrice di derivazione pseudospettrale*.

Qualora la funzione u sia definita sul dominio bidimensionale $\hat{\Omega}$, il calcolo della derivata pseudospettrale lungo una direzione si limita a far intervenire i soli valori nodali della funzione lungo la direzione stessa di derivazione. Infatti, per la natura tensoriale delle funzioni di base di Lagrange in due dimensioni, si osserva che:

$$\partial_{N_\xi} u(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{\varphi}_{ij}(\xi, \eta) \right] = \sum_{i,j=1}^{N+1} u_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{\varphi}_i(\xi) \cdot \hat{\varphi}_j(\eta) \quad (1.83)$$

e quindi:

$$\partial_{N_\xi} u(\xi_l, \eta_m) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u_{ij} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi}(\xi_l) \hat{\varphi}_j(\eta_m) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u_{ij} (D_N)_{li} \delta_{mj} = \sum_{i=1}^{N+1} u_{im} (D_N)_{li}. \quad (1.84)$$

Osservazione 1.4 Per quanto concerne la derivazione di una funzione continua u definita su un dominio Ω , immagine mediante la mappa \mathbf{F} (1.36) del dominio di riferimento $\hat{\Omega}$, si ha:

$$\partial_{N_x} u(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N+1} u_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{ij}(x, y) \right]. \quad (1.85)$$

Analizzando con attenzione il termine $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{ij}(x, y)$, si osserva che esso può essere riscritto in termini delle funzioni di base sul dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ come:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\varphi}_{ij}(\mathbf{F}^{-1}(x, y)) = \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.86)$$

ed analogamente, per una derivazione lungo la direzione y , si ha:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \hat{\varphi}_{ij}(\mathbf{F}^{-1}(x, y)) = \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (1.87)$$

Si ottiene quindi:

$$\nabla \varphi_{ij} = J_{\mathbf{F}}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_{ij} \quad (1.88)$$

dove:

$$\nabla \varphi_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla \hat{\varphi}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{ij}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

e dove

$$J_{\mathbf{F}}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

è la trasposta dell'inversa dello Jacobiano $J_{\mathbf{F}}$ associato alla trasformazione \mathbf{F} .

Si osserva che se il dominio Ω ha forma rettangolare, allora $J_{\mathbf{F}}^{-T}$ è una matrice diagonale e le derivate pseudospettrali si riconducono, a meno di un coefficiente costante in Ω , alla forma (1.83). Al contrario, quando il dominio Ω ha lati sghembi o curvilinei, la derivata lungo una direzione richiede la valutazione di entrambe le componenti del gradiente delle funzioni di base $\hat{\varphi}_{ij}$ definite sul dominio di riferimento $\hat{\Omega}$.

Poichè in genere è nota la trasformazione \mathbf{F} e non la sua inversa, la costruzione della matrice $J_{\mathbf{F}}^{-T}$ viene fatta a partire dalla matrice $J_{\mathbf{F}}$ ricordando che

$$J_{\mathbf{F}}^{-T} = (J_{\mathbf{F}}^{-1})^T = \frac{1}{\det J_{\mathbf{F}}} J_{\mathbf{F}}^0, \quad (1.91)$$

dove

$$J_{\mathbf{F}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Poichè è stata fatta la scelta di utilizzare trasformazioni isoparametriche, le componenti $x = F_1(\xi, \eta)$ e $y = F_2(\xi, \eta)$ della trasformazione \mathbf{F} possono essere espresse in termini polinomiali rispetto alla base di Lagrange $\{\hat{\varphi}_{ij}\}$ e quindi calcolare le derivate delle componenti della matrice $J_{\mathbf{F}}^0$ vuol dire calcolare derivate pseudospettrali di F_1 e F_2 come esposto in (1.84). \square

1.3 Interpretazione algebrica del problema discreto

A questo punto è possibile dare un'interpretazione algebrica al problema (1.30), intendendo con u_N il polinomio $I_N u$ (1.60).

Per semplicità di notazione si introduce la seguente numerazione lessicografica sui nodi della mesh \mathcal{M}_N : $i = (N + 1) \cdot (i_2 - 1) + i_1$, con $i_1, i_2 = 1, \dots, N + 1$ così che con la scrittura \mathbf{x}_i si intenda il nodo $\mathbf{x}_i = (x_{i_1}, y_{i_2})$ e con ω_i il peso $\omega_i = \gamma_{i_1} \gamma_{i_2}$. Quindi si pone $N_t = (N + 1)^2$.

Prendendo $v_N = \varphi_i$ e riscrivendo u_N in termini delle funzioni di base di Lagrange

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_t} u_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (1.93)$$

si ha:

$$a_N(u_N, v_N) = \sum_{j=1}^{N_t} u_j a_N(\varphi_j, \varphi_i). \quad (1.94)$$

Quindi, avendo posto $J_k = |\det J_{\mathbf{F}^{-1}}(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k))|$ per $k = 1, \dots, N_t$, per $i, j = 1, \dots, N_t$ si ha:

$$a_N(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{N_t} [\nu(\mathbf{x}) \nabla \varphi_j(\mathbf{x}_k) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_k) + b_0(\mathbf{x}_k) \varphi_j(\mathbf{x}_k) \varphi_i(\mathbf{x}_k)] \omega_k J_k \quad (1.95)$$

$$= \sum_{k=1}^{N_t} \{ \nu(\mathbf{x}) [J_{\mathbf{F}}^0(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k)) \nabla \hat{\varphi}_j(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k))] \cdot [J_{\mathbf{F}}^0(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k)) \nabla \hat{\varphi}_i(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k))] \frac{1}{J_k} \quad (1.96)$$

$$+ b_0(\mathbf{x}_k) \hat{\varphi}_j(\mathbf{x}_k) \hat{\varphi}_i(\mathbf{x}_k) J_k \} \omega_k. \quad (1.97)$$

I termini $\nabla \hat{\varphi}_j(\mathbf{x}_k)$ e $\nabla \hat{\varphi}_i(\mathbf{x}_k)$ vengono calcolati in base alle matrici elementari di derivazione pseudospettrale introdotte nel paragrafo precedente.

Denotando con Λ_N l'insieme degli indici $\{i = 1, \dots, N_t : \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_N\}$, il termine noto $\mathcal{F}_N(v_N)$ può essere espresso nella seguente forma:

$$\mathcal{F}_N(\varphi_i) = \sum_{k=1}^{N_t} f(\mathbf{x}_k) \varphi_i(\mathbf{x}_k) \omega_k J_k + \sum_{k \in \Lambda_N} h(\mathbf{x}_k) \varphi_i(\mathbf{x}_k) \gamma_l |\mathbf{g}'(F_l^{-1}(\mathbf{x}_k))| \quad (1.98)$$

$$= f(\mathbf{x}_i) \omega_i J_i + h(\mathbf{x}_i) \gamma_l |\mathbf{g}'(F_l^{-1}(\mathbf{x}_i))| \quad (1.99)$$

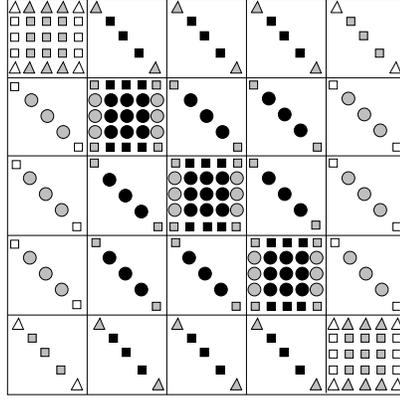


Figura 1.3: La struttura della matrice A_{sp} relativa al dominio di riferimento $\hat{\Omega}$

dove γ_l denota il peso LGL monodimensionale ed l può essere $l = 1, 2$ a seconda del lato di bordo cui il nodo appartiene, mentre si è posto $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$.

Posto

$$\mathbf{f} = [\mathcal{F}_N(\varphi_i)]_{i=1}^{N_t}, \quad (1.100)$$

$$\mathbf{u} = [u_i]_{i=1}^{N_t} \quad (1.101)$$

e

$$(A_{sp})_{ij} = a_N(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N_t \quad (1.102)$$

si ottiene il sistema lineare

$$A_{sp} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.103)$$

di dimensione N_t . La matrice A_{sp} è definita positiva ed è riconducibile ad una matrice simmetrica eliminando opportunamente le righe e le colonne associate ai nodi della frontiera con dato di Dirichlet.

Qualora il problema sia assegnato su un dominio computazionale di forma rettangolare ed i nodi della mesh siano ordinati secondo l'ordinamento da sinistra verso destra e dal basso verso l'alto, la matrice A_{sp} presenta un pattern regolare come si può vedere in figura 1.3, ovvero ha al più $(2N + 1)$ elementi non nulli per riga.

Quando invece il dominio computazionale ha lati curvilinei o sghembi, la matrice perde la propria struttura e diventa una matrice piena.

Definendo per una matrice B quadrata e invertibile il numero di condizionamento

$$\chi(B) = \|B\| \|B^{-1}\|, \quad (1.104)$$

dove $\|\cdot\|$ rappresenta una opportuna norma matriciale indotta da una norma vettoriale, si ha che il numero di condizionamento della matrice A_{sp} ha la seguente dipendenza da N : $\chi(A_{sp}) = \mathcal{O}(N^3)$ (si vedano [5], [57]).

1.3.1 Risolutori algebrici

Per la risoluzione del sistema lineare (1.103) possono essere utilizzati sia metodi di tipo diretto sia metodi di tipo iterativo. La sparsità della matrice A_{sp} e la forte dipendenza del numero di condizionamento dal grado di interpolazione N induce ad usare metodi di tipo iterativo per la risoluzione del sistema suddetto. Tuttavia, all'interno di uno schema iterativo in tempo o di uno schema di decomposizione di domini (si vedano i capitoli 3 e 5), può risultare vantaggioso fattorizzare la matrice A_{sp} in testa alla procedura e quindi risolvere un sistema triangolare ad ogni iterazione del metodo.

Tra i metodi di tipo diretto si segnala la fattorizzazione di Cholesky per matrici simmetriche e definite positive, la quale presenta una complessità computazionale di circa $1/6N_t^3$ operazioni in virgola mobile (o *flops*, floating point operations), dove $N_t = (N + 1)^2$ rappresenta la dimensione del sistema lineare in questione ([34]).

Tra i metodi di tipo iterativo per matrici simmetriche e definite positive si è dimostrato molto efficiente il metodo del Gradiente Coniugato (GC) (si veda ad esempio [35]). Tale schema richiede ad ogni iterazione un'operazione di prodotto matrice-vettore che può costare al più N_t^2 operazioni. In realtà il costo dell'operazione di prodotto matrice-vettore dipende dalla struttura della matrice e dal numero di elementi non nulli che essa presenta e, per un prodotto coinvolgente la matrice A_{sp} (1.102), si ha un costo di $(N + 1)^2 \cdot (2N + 1)$ flops.

È ben noto che la velocità di convergenza del metodo, ovvero il numero di iterazioni necessarie per ridurre l'errore tra soluzione numerica e quella esatta fino ad una precisione ε prefissata, dipende dal numero di condizionamento della matrice ed in particolare si ha ([34], [4]):

$$|\mathbf{e}^k|_{A_{sp}} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\chi_s(A_{sp})} - 1}{\sqrt{\chi_s(A_{sp})} + 1} \right)^k |\mathbf{e}^0|_{A_{sp}} \quad (1.105)$$

dove $k \geq 0$ rappresenta l'iterazione k -sima del metodo, $\mathbf{e}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}$ è l'errore al passo k , $|\mathbf{e}|_{A_{sp}} = \sqrt{(A_{sp}\mathbf{e}, \mathbf{e})}$ e (\cdot, \cdot) rappresenta il prodotto scalare euclideo. Infine, fissata una matrice quadrata B si è posto

$$\chi_s(B) = \frac{\max |\lambda(B)|}{\min |\lambda(B)|}, \quad (1.106)$$

essendo $\max |\lambda(B)|$ e $\min |\lambda(B)|$ rispettivamente l'autovalore di modulo massimo ed l'autovalore di modulo minimo della matrice B . Si osserva che per matrici simmetriche e definite positive il valore $\chi_s(B)$ (1.106) non è altro che il numero di condizionamento (1.104) relativamente alla norma $\|B\|_2 = \sqrt{\max \lambda(B^T B)}$.

Osservazione 1.5 Dalla stima (1.105) risulta immediato che minore è il numero di condizionamento della matrice in questione e minore sarà il numero di iterazioni necessarie al CG per raggiungere la precisione fissata; d'altro canto si è visto che la matrice spettrale A_{sp} presenta una forte dipendenza del numero di condizionamento dal parametro di discretizzazione N . Si presenta quindi opportuno preconditionare il sistema lineare (1.103). \square

1.3.2 Precondizionatori

Una tecnica diffusa di preconditionamento del sistema lineare (1.103) consiste nel sostituirlo con il sistema lineare equivalente

$$P^{-1}A_{sp}\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{f} \quad (1.107)$$

essendo P una matrice non singolare. Si richiederà che:

- P sia semplice da costruire,
- il sistema $Px = b$ sia semplice da risolvere (ed in ogni caso si presenti una complessità computazionale decisamente inferiore a quella del sistema originale (1.103)),
- lo spettro di $P^{-1}A_{sp}$ sia molto più ristretto di quello di A_{sp} .

Si dice inoltre che P è un *precondizionatore ottimale* per la matrice A_{sp} se succede che $\chi(P^{-1}A_{sp}) \leq C$ con C indipendente dalla dimensione del sistema lineare. In questo ultimo caso un metodo iterativo converge alla soluzione del sistema con un numero di iterazioni indipendente dalla dimensione della matrice A_{sp} .

In letteratura sono noti diversi tipi di preconditionatori, ed in particolare si distingue tra preconditionatori di tipo algebrico e preconditionatori di tipo differenziale. I primi sono ottenuti mediante opportune operazioni sulla matrice A_{sp} . Tra di essi

si ricordano i preconditionatori diagonali:

$$P = D_2 = \text{diag}(d_1, \dots, d_{N_t}), \quad d_i = \left(\sum_{j=1}^{N_t} (A_{sp})_{ij} \right)^{1/2}, \quad (1.108)$$

$$P = D_\infty = \text{diag}(d_1, \dots, d_{N_t}), \quad d_i = \max_{j=1, \dots, N_t} |(A_{sp})_{ij}|,$$

e la fattorizzazione incompleta di Cholesky $P = IC(A_{sp})$ che consiste nel fattorizzare la matrice A_{sp} senza modificare la struttura della matrice stessa ([34]). Più precisamente, se $A_{sp} = GG^T$, si pone $P = HH^T$, dove H è la matrice triangolare inferiore ottenuta fattorizzando la matrice A_{sp} senza modificare gli elementi nulli di A_{sp} .

I preconditionatori diagonali non sono preconditionatori ottimali per la matrice A_{sp} , tuttavia si può affermare che il loro costo di costruzione è molto basso e tale è anche il costo della risoluzione dei sistemi $Px = b$. Con $P = D_2$ o $P = D_\infty$, si ottiene che $\chi(P^{-1}A_{sp}) \leq CN^2$, come si può osservare in tabella (1.1), dove $C = 0.746$ per $P = D_2$ e $C = 0.747$ per $P = D_\infty$.

Il costo di costruzione del preconditionatore Cholesky incompleto è abbastanza elevato; nonostante non venga effettuato il fill-in, l'algoritmo richiede una grande quantità di controlli sul valore degli elementi, controlli che hanno un forte peso sul costo complessivo dello stesso algoritmo. Questo preconditionatore viene utilizzato qualora non si abbia a disposizione un preconditionatore ottimale e quando i preconditionatori diagonali si rivelano inefficienti. Dalle tabelle (1.1) e (1.2) si può osservare che, per $P = IC(A_{sp})$, si ha $\chi(P^{-1}A_{sp}) \leq C(N^p)$ con $p > 2$. Tuttavia lo spettro degli autovalori risulta essere più ristretto rispetto a quello dei preconditionatori diagonali e questo comporta un minor numero di iterazioni all'interno del metodo del Gradiente Coniugato per il raggiungimento della precisione fissata ε sul residuo.

Con il termine di “preconditionatore di tipo differenziale” si intende un preconditionatore legato al problema differenziale che viene approssimato. La matrice P è ottenuta mediante la discretizzazione del problema differenziale originario con un metodo di tipo diverso da quello usato nella discretizzazione primaria. Ovvero, se il problema (1.26) è approssimato con metodi spettrali, e A_{sp} è la matrice associata all'approssimazione scelta, P potrà essere la matrice associata all'approssimazione del problema (1.26) con metodi quali differenze finite centrate o elementi finiti o, ancora, elementi spettrali bilineari.

In letteratura sono ben noti il preconditionatore alle *differenze finite centrate* ([50]) ed il preconditionatore agli *elementi finiti bilineari*, entrambi costruiti sui nodi delle formule di quadratura della collocazione spettrale (si vedano [22], [15], [12], [23] e [58]). In entrambi i casi è stato verificato che i preconditionatori suddetti risultano essere preconditionatori ottimali per la matrice di collocazione forte spettrale di Legendre o di Chebyshev (si veda il paragrafo 1.4).

In questo capitolo è presentato un preconditionatore agli elementi spettrali bilineari per il metodo di Galerkin generalizzato spettrale.

1.3.3 Il preconditionatore agli elementi spettrali bilineari

In questo paragrafo vengono presentati i risultati relativi ad un preconditionatore agli elementi spettrali bilineari, definiti sui nodi LGL della mesh spettrale. Rimandando al capitolo 5 per una completa presentazione del metodo agli elementi spettrali qui ci si limita a definire il preconditionatore $P = A_{\mathcal{H}}$.

Più dettagliatamente, sia Ω il dominio computazionale e sia \mathcal{M}_N l'insieme dei nodi LGL (1.40). La mesh \mathcal{M}_N definisce una decomposizione conforme \mathcal{T}_H (si veda il capitolo 5) del dominio computazionale Ω in N^2 quadrilateri T_k ($k = 1, \dots, Ne = N^2$) i cui diametri sono, per costruzione, $diam(T_k) \leq H = \frac{C}{N}$. Su ogni quadrilatero T_k si consideri un'interpolazione di grado uno e si denoti con \mathcal{H} la coppia di parametri $(1, H)$ rappresentanti il grado di interpolazione su ogni elemento ed il massimo diametro della decomposizione \mathcal{T}_H , rispettivamente.

Quindi si consideri lo spazio

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_{T_k} \in \mathbb{Q}_1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H\}. \quad (1.109)$$

Quale preconditionatore per la matrice A_{sp} si considera la matrice $P = A_{\mathcal{H}}$ con $\mathcal{H} = (1, H)$, ovvero la matrice ottenuta da una discretizzazione con elementi spettrali di grado “uno” sulla mesh \mathcal{M}_N :

$$(A_{\mathcal{H}})_{ij} = \sum_{k=1}^{Ne} a_{1,k}(\psi_j, \psi_i) = \sum_{k=1}^{Ne} \left[(\nu \nabla \psi_j, \nabla \psi_i)_{1,T_k} + (\psi_j, \psi_i)_{1,T_k} \right], \quad (1.110)$$

con $i, j = 1, \dots, (N+1)^2$.

Le funzioni ψ_i sono le funzioni della base di Lagrange

$$\beta_{\mathcal{H}} = \{\psi_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap V : \psi_i|_{T_k} \in \mathbb{Q}_1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H\}, \quad (1.111)$$

mentre $(\cdot, \cdot)_{1,T_k}$ denota il prodotto scalare discreto (1.41) sul dominio T_k con 2 nodi di quadratura.

Si è verificato sperimentalmente che la matrice $A_{\mathcal{H}}$ definita in (1.110) è un preconditionatore ottimale per A_{sp} , ovvero

$$\exists C \text{ indipendente da } N : \quad \chi(A_{\mathcal{H}}^{-1}A_{sp}) \leq C \quad (1.112)$$

e si possono osservare i risultati ottenuti nelle tabelle (1.1), (1.2), (1.3).

Questo preconditionatore è un preconditionatore agli elementi finiti bilineari indotto dalla griglia LGL. Pertanto i singoli elementi altro non sono che i rettangoli definiti da quattro nodi della mesh \mathcal{M}_N dei nodi LGL.

Inoltre, anzichè considerare gli integrali esatti nella formulazione della matrice di rigidità, si utilizzano le formule di quadratura di Legendre Gauss-Lobatto.

Per quanto osservato in precedenza, le funzioni di base sono ortogonali nel prodotto scalare di Legendre Gauss-Lobatto. Questo comporta che la matrice delle masse

$$M_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_{N,\Omega} \quad i, j = 1.., N_t \quad (1.113)$$

associata agli elementi spettrali in questione sia una matrice diagonale.

Vale la pena di osservare che il problema da preconditionare non è scritto nella forma di collocazione spettrale, bensì secondo il metodo di Galerkin generalizzato.

Quando il problema da preconditionare è formulato secondo lo schema di collocazione forte (si veda il paragrafo 1.4), il preconditionatore naturale per la matrice spettrale (che denotiamo con A_{sp}^c) è ([22], [12], [58]):

$$P^c = M^{-1}A_{\mathcal{H}} \quad (1.114)$$

in quanto lo schema di collocazione spettrale forte può essere interpretato come derivante da uno schema di Galerkin generalizzato in cui il sistema è stato moltiplicato per l'inversa della matrice delle masse M .

Quando invece il problema è approssimato mediante uno schema di Galerkin generalizzato il preconditionatore naturale per la matrice A_{sp} è la matrice di rigidità $A_{\mathcal{H}}$ e quindi preconditionare il sistema lineare (1.103) con la matrice $A_{\mathcal{H}}$ vuol dire risolvere il sistema

$$A_{\mathcal{H}}^{-1}A_{sp}\mathbf{u} = A_{\mathcal{H}}^{-1}\mathbf{f}. \quad (1.115)$$

All'interno dello schema del gradiente coniugato questo comporta il dover risolvere ad ogni passo un sistema lineare del tipo

$$A_{\mathcal{H}}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1.116)$$

La matrice $A_{\mathcal{H}}$ è una matrice simmetrica e definita positiva e con banda al più uguale $(N + 1)$.

N	$P = I$	$P = D_2$	$P = D_\infty$	$P = IC(A_{sp})$	$P = A_{\mathcal{H}}$
4	31.157	10.554	10.466	1.578	2.754
8	65.384	46.478	46.582	5.421	3.373
12	117.767	106.343	106.602	11.262	3.594
16	253.451	190.182	190.569	24.198	3.720
20	469.526	297.998	298.501	43.683	3.799
24	785.515	429.792	430.403	106.094	3.857
28	1220.924	585.563	586.279	152.729	3.901

Tabella 1.1: $\chi(P^{-1}A_{sp})$ per il problema (1.1) con $\Omega = (0, 1)^2$, viscosità $\nu = 1$ e $b_0 = 1$ e condizioni al bordo di tipo Dirichlet.

N	$P = I$	$P = IC(A_{sp})$	$P = A_{\mathcal{H}}$
4	142.811	7.884	4.382
8	594.903	50.664	5.366
12	1592.773	116.505	5.709
16	3385.365	390.873	5.930
20	6214.722	644.554	6.105
24	10334.955	1369.123	6.255
28	15986.890	1999.867	6.346

Tabella 1.2: $\chi(P^{-1}A_{sp})$ per il problema (1.1) con $\Omega = (0, 1)^2$, viscosità $\nu = 1$ e $b_0 = 1$, con $\partial\Omega_D = \{(x, 1), x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y), y \in [0, 1]\}$ e $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$.

Nelle tabelle (1.1) (1.2) è messo a confronto il numero di condizionamento della matrice A_{sp} preconditionata con la matrice identità, la matrice diagonale $P = D_2$ definita in (1.108), la matrice $P = IC(A_{sp})$ e la matrice $P = A_{\mathcal{H}}$.

Nella tabella (1.3) è riportato il numero di condizionamento della matrice $A_{\mathcal{H}}^{-1}A_{sp}$ per il problema (1.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$ con $\nu = b_0 = 1$ e condizioni al bordo di tipo Dirichlet, Neumann e miste.

In figura 1.4 è mostrata la storia di convergenza del Gradiente Coniugato per la risoluzione del sistema lineare (1.103) relativo al problema (1.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$, con $\nu = b_0 = 1$ e condizioni al bordo di tipo Neumann. Il grado di interpolazione spettrale è $N = 12$.

N	caso 1	caso 2	caso 3
4	2.724	4.355	5.043
8	3.355	5.356	5.382
12	3.584	5.705	5.708
16	3.714	5.926	5.929
20	3.794	6.101	6.105
24	3.853	6.253	6.255
28	3.897	6.344	6.346

Tabella 1.3: $\chi(A_{\mathcal{H}}^{-1}A_{sp})$ per il problema (1.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$, con viscosità $\nu = 1$ e $b_0 = 1$. Il caso 1 corrisponde a condizioni al bordo di Dirichlet, il caso 2 a condizioni al bordo miste (su due lati è stata imposta una condizione di Dirichlet e sugli altri due una condizione di Neumann), il caso 3 corrisponde a condizioni al bordo di Neumann.

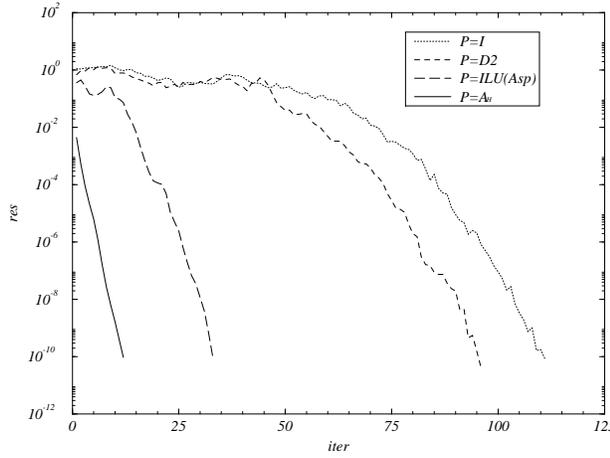


Figura 1.4: Storia di convergenza del Gradiente Coniugato sul problema (1.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$, con $\nu = 1$, $b_0 = 1$ e condizioni di Neumann al bordo al variare del preconditionatore. Il grado di interpolazione spettrale è $N = 12$.

1.4 Equivalenza con lo schema di collocazione debole

Si consideri il problema (1.14) ed i nodi \mathcal{M}_N delle formule di quadratura di Legendre Gauss-Lobatto introdotte nel paragrafo 1.3.

Approssimare la soluzione u del problema (1.14) mediante lo schema di collocazione spettrale vuol dire:

determinare il polinomio $u_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega)$ tale che:

$$\begin{cases} L_N u_N(\mathbf{x}_i) = -\operatorname{div} I_N(\nu \nabla u_N)(\mathbf{x}_i) + b_0 u_N(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \Omega \\ u(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i) & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \partial\Omega_D \\ \nu \frac{\partial u_N}{\partial n}(\mathbf{x}_i) = h(\mathbf{x}_i) & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \partial\Omega_N \end{cases} \quad (1.117)$$

dove, si ricorda che per $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, I_N rappresenta il polinomio di grado N interpolante la funzione v nei nodi LGL $\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N$.

La formulazione (1.117) viene denominata di *collocazione forte* spettrale in contrapposizione alla formulazione di *collocazione debole*. In quest'ultima, che si legge

$$\begin{cases} L_N u_N(\mathbf{x}_i) = -\operatorname{div} I_N(\nu \nabla u_N)(\mathbf{x}_i) + b_0 u_N(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \Omega \\ u(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i) & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \partial\Omega_D \\ \nu \frac{\partial u_N}{\partial n}(\mathbf{x}_i) \gamma_{i_i} = h(\mathbf{x}_i) \gamma_{i_i} + (f(\mathbf{x}_i) - L_N u_N(\mathbf{x}_i)) \omega_i & \mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_N \cap \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (1.118)$$

la condizione al bordo di tipo Neumann non viene imposta in termini esatti, bensì a meno del prodotto tra il residuo dell'equazione stessa ed il peso delle formule di quadratura. Una tale imposizione delle condizioni al bordo di tipo Neumann è ottenuta a partire dalla formulazione di Galerkin generalizzato (1.26) del problema (1.14) e grazie alla formula discreta di Green seguente:

$$(\nu \nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} = (-\operatorname{div} I_N(\nu \nabla u_N), v_N)_{N,\Omega} + \sum_{l=1}^4 \left(\nu \frac{\partial u_N}{\partial n}, v_N \right)_{N,l_k} \quad (1.119)$$

essendo l_k , per $k = 1, \dots, 4$ i lati della frontiera $\partial\Omega$.

È immediato verificare tramite la formula (1.119) che la formulazione di collocazione spettrale debole (1.118) e la formulazione spettrale di Galerkin generalizzato (1.30) sono equivalenti. Inoltre, qualora su tutto il bordo del dominio computazionale vengano imposte condizioni di Dirichlet, si ottiene l'equivalenza anche tra le formulazioni (1.30), (1.118) e la formulazione forte (1.117).

Da un punto di vista algebrico il problema (1.117) si legge:

$$A^c \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.120)$$

dove, introducendo le funzioni di base di Lagrange $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_t}$ (con $N_t = (N + 1)^2$), e ponendo

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{i = 1, \dots, N_t : \mathbf{x}_i \in \Omega \setminus \partial\Omega \cap \mathcal{M}_N\} \\ \Lambda_D &= \{i = 1, \dots, N_t : \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_D \cap \mathcal{M}_N\} \\ \Lambda_N &= \{i = 1, \dots, N_t : \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_N \cap \mathcal{M}_N\}, \end{aligned} \quad (1.121)$$

si ha

$$A_{ij}^c = \begin{cases} L_N \varphi_j(\mathbf{x}_i) & j \in \Lambda \\ \delta_{ij} & j \in \Lambda_D \\ \nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(\mathbf{x}_i) & j \in \Lambda_N \end{cases} \quad (1.122)$$

$$\mathbf{u} = [u_N(\mathbf{x}_j)]_{j=1}^{N_t} \quad \mathbf{f} = [f(\mathbf{x}_i)]_{i=1}^{N_t}. \quad (1.123)$$

Il problema (1.118) diventa invece:

$$A_{sp}^c \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.124)$$

con

$$(A_{sp}^c)_{ij} = \begin{cases} L_N \varphi_j(\mathbf{x}_i) & j \in \Lambda \\ \delta_{ij} & j \in \Lambda_D \\ \nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}(\mathbf{x}_i) \gamma_{i_i} + L_N \varphi_j(\mathbf{x}_i) \omega_i & j \in \Lambda_N. \end{cases} \quad (1.125)$$

Osservazione 1.6 Nel caso in cui un vertice del dominio computazionale Ω appartenga al bordo $\partial\Omega_N$, la derivata normale $\frac{\partial u_N}{\partial n}$ è vista come la somma di due termini, interpretabili come contributi, sui lati di cui il vertice rappresenta un estremo, dell'integrale discreto definito su $\partial\Omega_N$. Considerando ad esempio il nodo \mathbf{x}_i , con $i = N + 1$, la condizione di Neumann debole si legge:

$$\nu \frac{\partial u_N}{\partial x}(\mathbf{x}_i)\gamma_1 + \nu \frac{\partial u_N}{\partial y}(\mathbf{x}_i)\gamma_N + \omega_i L_N u_N(\mathbf{x}_i) = h(\mathbf{x}_i)(\gamma_1 + \gamma_N) + f(\mathbf{x}_i)\omega_i. \quad (1.126)$$

□

Osservazione 1.7 Si osserva che la matrice A_{sp}^c può essere ricondotta ad una matrice simmetrica a patto di moltiplicarla a sinistra per la matrice delle masse (1.113). □

Osservazione 1.8 Nel lavoro svolto si è preferito mantenere l'impostazione dello schema di Galerkin generalizzato rispetto ad una impostazione di collocazione in vista del passaggio al metodo degli elementi spettrali che trova le proprie basi su una formulazione di tipo Galerkin. □

Capitolo 2

Il problema di diffusione trasporto stazionario

Il problema lineare differenziale di diffusione-transporto che consideriamo quale modello per la nostra trattazione è il seguente:

determinare $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nu \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0 u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega_D \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u = h & \text{su } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (2.1)$$

dove la funzione $\nu(x, y) \geq \nu_0 > 0$ è detta viscosità cinematica, $\mathbf{b}(x, y) = [b_1(x, y), b_2(x, y)]^T$ è un campo assegnato in Ω , la funzione $b_0(x, y)$ è non negativa. Si suppone quindi che ν, b_1, b_2, b_0 e $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$. I dati f, g e h sono presi in $L^2(\Omega)$, $H^{1/2}(\partial\Omega_D)$ ed in $L^2(\partial\Omega_N)$ rispettivamente.

Il termine $\nu \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u$ rappresenta la derivata conormale associata all'operatore differenziale

$$Lu = -\operatorname{div}(\nu \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0 u. \quad (2.2)$$

Procedendo in maniera analoga a quella seguita per il problema associato ad un operatore ellittico autoaggiunto, si perviene alla formulazione variazionale del problema (2.1):

$$\text{trovare } u \in V \equiv H_{0, \partial\Omega_D}^1(\Omega) : \quad a(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V, \quad (2.3)$$

dove

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nu \nabla u - \mathbf{b}u) \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} b_0 u v \, d\Omega \quad (2.4)$$

e

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} h v \, d\partial\Omega. \quad (2.5)$$

Come nel capitolo precedente con $\hat{\Omega}$ denoteremo il dominio bidimensionale di riferimento $\hat{\Omega} = (-1, 1)^2$, mentre con Ω intenderemo l'immagine del dominio $\hat{\Omega}$ mediante la trasformazione \mathbf{F} (1.36).

La forma bilineare a risulta coerciva alla seguenti condizioni (si veda [57]):

se $\partial\Omega_D \neq \emptyset$ si chiede che

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0}{C_\Omega} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0 &> 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} &< 0 \quad \text{q.o. su } \partial\Omega_N \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove ν_0 è la costante di ellitticità associata alla forma a (1.21) e C_Ω è la costante della disuguaglianza di Poincaré dipendente dal dominio Ω in questione:

$$\int_{\Omega} v^2 \, d\Omega \leq C_\Omega \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega \quad \forall v \in H_{0,\partial\Omega_D}^1(\Omega); \quad (2.7)$$

se $\partial\Omega_D \equiv \emptyset$ si chiede che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0 &> 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} &< 0 \quad \text{q.o. su } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'approssimazione spettrale del problema (2.1) secondo il metodo di Galerkin generalizzato, alla stregua di quanto fatto nel capitolo precedente si legge:

$$\text{trovare } u_N \in V_N \equiv V \cap \mathbb{Q}_N(\Omega) : \quad a_N(u_N, v_N) = \mathcal{F}_N(v_N) \quad \forall v_N \in V_N \quad (2.9)$$

con

$$a_N(u_N, v_N) = (\nu \nabla u_N - \mathbf{b} u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + (b_0 u, v)_{N,\Omega} \quad (2.10)$$

e

$$\mathcal{F}_N(v_N) = (f, v)_{N,\Omega} + (h, v)_{N,\partial\Omega_N}. \quad (2.11)$$

Lemma 2.1 Nell'ipotesi che le condizioni (2.6) e (2.8) siano soddisfatte, la forma bilineare discreta a_N definita in (2.10) è uniformemente coerciva su $V_N \times V_N$.

Dimostrazione. Per $u_N, v_N \in V_N$ si consideri la seguente formula discreta di Green:

$$(\operatorname{div} I_N(\mathbf{b}u_N), v_N)_{N,\Omega} = -(\mathbf{b}u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \quad (2.12)$$

e la si applichi alla forma bilineare discreta (2.10), si ottiene:

$$\begin{aligned} a_N(u_N, v_N) &= (\nu, \nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} + \frac{1}{2} [(\mathbf{b} \cdot \nabla u_N, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b}u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega}] \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0 \right) u_N, v_N \right)_{N,\Omega} - \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_N}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Quindi:

$$a_N(u_N, u_N) = \int_{\Omega} \nu |\nabla u_N|^2 d\Omega + \left(\left(\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0 \right) u_N, u_N \right)_{N,\Omega} - \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, u_N)_{N,\partial\Omega_N} \quad (2.14)$$

e, per la disuguaglianza di Poincaré, si ha:

$$a_N(u_N, u_N) \geq \frac{\nu_0}{C_{\Omega}} \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\left(\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0 \right) u_N, u_N \right)_{N,\Omega} - \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, u_N)_{N,\partial\Omega_N}. \quad (2.15)$$

Per le condizioni di coercività (2.6) e (2.8) si ottiene l'uniforme coercività della forma discreta a_N . \square

Teorema 2.1 Siano a_N e \mathcal{F}_N la forma bilineare discreta definita in (2.10) ed il funzionale lineare discreto (2.11). Esiste unica soluzione del problema (2.9).

Dimostrazione. Per il lemma (2.1) la forma bilineare a_N è uniformemente coerciva su $V_N \times V_N$. Per il Lemma di Strang (Teorema 1.1) si ha la tesi. \square

2.1 Interpretazione algebrica

Analogamente a quanto è stato detto nel capitolo 1, si introduce la base di Lagrange $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_t}$ riferita ai nodi LGL in \mathcal{M}_N e si definisce la matrice:

$$(A_{sp})_{ij} = a_N(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N_t \quad (2.16)$$

con:

$$a_N(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{N_t} \left[\nu(\mathbf{x}_k) \nabla \varphi_j(\mathbf{x}_k) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_k) J_k^{-1} - \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_k) + b_0(\mathbf{x}_k) \varphi_j(\mathbf{x}_k) \varphi_u(\mathbf{x}_k) J_k \right] \omega_k. \quad (2.17)$$

con $J_k |\det J_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_k))|$.

Riprendendo le notazioni (1.101) e (1.100) si perviene al sistema lineare

$$A_{sp} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.18)$$

di dimensione $N_t = (N + 1)^2$, la cui matrice A_{sp} pur essendo definita positiva, non è a priori simmetrica per la presenza del termine di trasporto.

Per la risoluzione del sistema lineare (2.18) si ricorre a metodi di risoluzione per matrici non simmetriche. Anche in questo caso sono stati considerati sia metodi di tipo diretto (la fattorizzazione LU di Doolittle ([34]) per matrici generiche), sia metodi di tipo iterativo (una variante del Gradiente Coniugato per matrici non simmetriche denominato BiCGStab ([64])).

2.1.1 Risolutori e preconditionatori

Come nel caso dell'approssimazione di problemi ellittici autoaggiunti, si presenta opportuno preconditionare il sistema lineare (2.18).

Qualora si considerino metodi di tipo diretto verrà fatto uso di preconditionatori diagonali al fine di ridurre gli errori di round-off. Infatti, moltiplicare la matrice del sistema per una matrice diagonale del tipo (1.108) significa *scalare* gli elementi della matrice stessa, al fine di ridurre il salto di ordine di grandezza tra gli elementi. Tali preconditionatori diagonali sono spesso denominati *matrici di scaling* ed il loro benefico effetto sugli errori di round-off è apprezzato in particolare nell'ambito dell'approssimazione spettrale, dove si raggiungono precisioni sovente vicine alla precisione di macchina. In ([16]) sono riportati risultati che confermano l'efficienza delle matrici di scaling.

Si osserva che nel caso di matrici simmetriche non abbiamo introdotto lo scaling della matrice A_{sp} per non perdere la proprietà di simmetria della matrice in esame.

Nel caso in cui si risolva il sistema con il metodo BiCGStab, potranno essere considerati sia preconditionatori di tipo algebrico (quali le matrici diagonali o la fattorizzazione incompleta LU della matrice), sia preconditionatori di tipo differenziale

alla stregua di quelli presentati per il problema simmetrico. Per mantenere buone proprietà di preconditionamento si costruisce il preconditionatore differenziale relativamente all'operatore completo ovvero con parte di diffusione e di trasporto.

A differenza del metodo del gradiente coniugato, il metodo BiCGStab richiede ad ogni passo il calcolo di due prodotti matrice vettore e, nel caso di sistemi preconditionati, anche la risoluzione di due sistemi lineari sul preconditionatore.

Tra i preconditionatori algebrici per la matrice A_{sp} sono stati considerati, come nel caso dei problemi ellittici autoaggiunti, preconditionatori diagonali (D_2 e D_∞) e la fattorizzazione incompleta LU della matrice A_{sp} , che denominiamo $ILLU(A_{sp})$. Tale preconditionatore è costruito come il preconditionatore Cholesky incompleto $IC(A_{sp})$ per matrici simmetriche.

Più precisamente, se L ed U sono due matrici triangolari tali che $A_{sp} = LU$, si definisce la matrice $ILLU(A_{sp}) = L'U'$ dove L' e U' sono due matrici triangolari ottenute dalla fattorizzazione di A_{sp} costruendo i soli elementi corrispondenti a quegli elementi della matrice A_{sp} che all'origine erano non nulli.

Come per il caso simmetrico, si osserva che i preconditionatori algebrici non sono preconditionatori ottimali per la matrice A_{sp} e si può osservare nella tabella (2.1).

Quale preconditionatore differenziale è stato considerato il preconditionatore agli elementi spettrali bilineari $P = A_{\mathcal{H}}$ costruito in maniera analoga a come è stato fatto per il problema ellittico autoaggiunto (si vedano a tal proposito le definizioni date nel paragrafo 1.3.3).

Posto $\mathcal{H} = (1, H)$, con $H = 1/N$ si definisce

$$(A_{\mathcal{H}})_{ij} = \sum_{k=1}^{Ne} a_{1,k}(\psi_j, \psi_i) = \sum_{k=1}^{Ne} \left[(\nu \nabla \psi_j - \mathbf{b} \psi_j, \nabla \psi_i)_{1,T_k} + (b_0 \psi_j, \psi_i)_{1,T_k} \right] \quad (2.19)$$

essendo ψ_j, ψ_i le funzioni di Lagrange appartenenti alla base $\beta_{\mathcal{H}}$ definita in (1.111).

Analogamente a quanto si è visto per il problema ellittico autoaggiunto, anche per il problema di diffusione trasporto si è verificato sperimentalmente che il preconditionatore $A_{\mathcal{H}}$ è ottimale per la matrice A_{sp} . Il numero di condizionamento della matrice $A_{\mathcal{H}}^{-1} A_{sp}$ risulta indipendente dal parametro N di discretizzazione come si può osservare dalle tabelle (2.1) e (2.2).

Si consideri il seguente caso test:

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) = f & \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

N	$P = I$	$P = D_2$	$P = ILU(A_{sp})$	$P = A_{\mathcal{H}}$
4	34.719	10.946	1.587	2.849
8	73.266	47.996	5.519	3.486
12	122.591	109.532	11.514	3.695
16	262.257	195.602	20.654	3.797
20	484.992	306.796	43.117	3.865
24	813.346	444.215	78.593	3.913
28	1265.102	606.171	155.847	3.951

Tabella 2.1: Il numero di condizionamento $\chi(P^{-1}A_{sp})$ per la matrice associata al problema di diffusione trasporto (2.1).

N	$P = I$	$P = D_2$	$P = ILU(A_{sp})$	$P = A_{\mathcal{H}}$
4	253.73	224.439	12.227	4.611
8	1074.955	987.463	88.134	5.571
12	2888.576	2819.001	208.808	5.874
16	6152.455	6125.818	821.885	6.046
20	11306.151	11517.254	1304.585	6.190
24	18827.821	19335.909	2648.625	6.335
28	29153.734	30184.948	4379.316	6.419

Tabella 2.2: Il numero di condizionamento $\chi(P^{-1}A_{sp})$ per la matrice associata al problema di diffusione trasporto (2.20) con $\nu = 1$, $\mathbf{b} = (1, x + y)$, $b_0 = 0$, definito sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$, con $\partial\Omega_D = \{(x, 1), x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y), y \in [0, 1]\}$ e $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$.

con $\mathbf{b} = (1, x + y)$, $f = -e^{x+y}$ e $g = e^{x+y}$. Nelle tabelle (2.1) e (2.2) è riportato il numero di condizionamento $\chi(P^{-1}A_{sp})$ associato al problema (2.20) al variare del grado N di interpolazione spettrale e per i diversi preconditionatori presentati.

In figura (2.1) è riportata la storia di convergenza dell'algoritmo BiCGStab, per la risoluzione del sistema lineare ottenuto dalla discretizzazione del problema (2.20) al variare del preconditionatore e con grado di interpolazione $N = 12$.

Nella tabella (2.3) è riportato il numero di iterazioni necessarie all'algoritmo BiCGStab per raggiungere una precisione $\varepsilon = 1.d - 10$ sul residuo ed il tempo di CPU, misurato in secondi (su RISC6000 IBM, mod.370), relativi alla risoluzione del

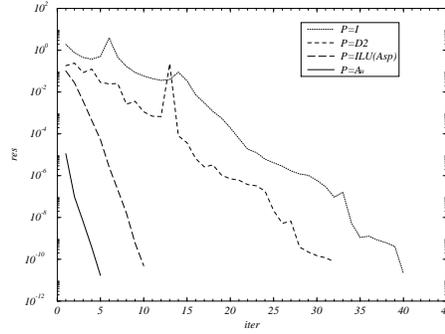


Figura 2.1: Storia di convergenza per il problema di diffusione trasporto (2.20) Il parametro di discretizzazione è $N = 12$.

N	$P = I$		$P = D_2$		$P = IC(A_{sp})$		$P = A_{\mathcal{H}}$	
	Nit	CPU-time	Nit	CPU-time	Nit	CPU-time	Nite	CPU-time
4	10	.241e-1	9	.237e-1	5	.277e-1	5	.297e-1
8	24	.723e-1	21	.539e-1	7	.107	5	.745e-1
12	35	.246	34	.219	11	.642	5	.244
16	56	.804	45	.769	15	.289e+1	4	.713
20	72	.212e+1	58	.193e+1	18	.963e+1	4	.187e+1
24	93	.519e+1	72	.436e+1	21	.266e+3	4	.380e+1

Tabella 2.3: Numero di iterazioni e tempo di CPU per la risoluzione del sistema lineare associato al problema differenziale (2.20). I Tempi di CPU sono espressi in secondi, i calcoli sono stati eseguiti su workstation Risc6000 IBM Mod. 370.

problema di diffusione trasporto di cui è stata data sopra la storia di convergenza.

Osservazione 2.1 Come viene osservato in ([57], Cap. 6), qualora la costante di coercività a_0 associata alla forma bilineare a (2.4) sia molto piccola in confronto alla costante di continuità a^0 della forma bilineare stessa, sia per il metodo di Galerkin che per il metodo di Galerkin generalizzato, la variabilità del gradiente della soluzione numerica rispetto al gradiente della soluzione esatta non è controllata in modo significativo dai dati. In particolare, se $\|\nu\|_{L_\infty(\Omega)}$ è piccola rispetto al termine $\|\mathbf{b}\|_{[L_\infty(\Omega)]^2}$ od al termine $\|b_0\|_{L_\infty(\Omega)}$, si ha che il rapporto $\frac{a^0}{a_0} \gg 1$ e si possono verificare oscillazioni spurie sulla soluzione numerica.

In particolare nel caso di approssimazione spettrale, quando il fenomeno di trasporto prevale su quello di diffusione, lo schema di Galerkin può essere instabile se il grado del polinomio di interpolazione non è sufficientemente grande rispetto al rapporto $\frac{\|\nu\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\mathbf{b}\|_{[L^\infty(\Omega)]^2}}$. In tale caso è necessario ricorrere a schemi alternativi.

Negli ultimi anni sono state introdotte diverse tecniche di stabilizzazione sullo schema di Galerkin al fine di poter risolvere problemi a trasporto dominante senza dover ricorrere al raffinamento della discretizzazione del dominio computazionale. \square

2.2 Tecniche di stabilizzazione

Nell'ambito dell'approssimazione elementi finiti, sono state proposte ultimamente alcune semplici strategie volte a superare le limitazioni insite nel metodo di Galerkin quando esso venga applicato in ambito fluidodinamico. Queste metodologie consistono essenzialmente nell'aggiungere alla tradizionale formulazione di Galerkin termini dipendenti dalla discretizzazione in uso in modo da aumentare le proprietà di stabilità del metodo senza degradarne l'accuratezza. Storicamente la prima di tali tecniche, che prendono in generale il nome di *metodi di stabilizzazione*, è stata introdotta per problemi scalari di diffusione-trasporto da Hughes e Brooks ([8], [9]) e viene indicata col nome di SUPG (Streamline Upwind/Petrov Galerkin); per essa, Johnson e Nävert ([39]) hanno svolto l'analisi di stabilità ponendo il primo passo per le successive estensioni ad altri settori della fluidodinamica ([63], [38], [41], [40], [42]). Tra le varianti al metodo SUPG particolarmente importanti sono i metodi di tipo Galerkin Least-squares (GALS) introdotti da Hughes et al. ([62]) ed il metodo Douglas-Wang (DW) ([37]).

Successivamente le tecniche di stabilizzazione sono state studiate anche per approssimazioni con metodi spettrali. In letteratura sono noti due approcci: il primo consiste nello stabilizzare lo schema di collocazione spettrale aggiungendo alle funzioni di base nello spazio dei polinomi di grado N funzioni a supporto locale (funzioni a bolla) ([10], [13]). Il secondo approccio consiste nell'applicare i metodi SUPG, GALS, DW allo schema di collocazione spettrale ([52]).

Come alternativa alle tecniche di stabilizzazione viene proposto in [52] un metodo eterogeneo di decomposizione di domini secondo il quale le oscillazioni spurie della soluzione di un problema a convezione dominante vengono eliminate risolvendo il problema completo di natura ellittica nella regione di forte variazione del gradiente ed un problema di tipo iperbolico nella regione di minima variazione del gradiente.

In questo capitolo vengono ripresi gli schemi SUPG, GALs e DW per il problema scalare di diffusione trasporto sullo schema di Galerkin generalizzato, discretizzato con metodi spettrali.

Per semplicità di esposizione si supponga che vengano assegnate condizioni di Dirichlet su tutto il bordo del dominio computazionale Ω , cioè $\partial\Omega_D \equiv \partial\Omega$, per cui il funzionale lineare discreto \mathcal{F}_N si riduce al solo termine $\mathcal{F}_N = (f, v_N)_{N,\Omega}$. Si consideri un campo \mathbf{b} tale che $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$.

Stabilizzare il problema (2.9) nel senso di [9], [62], o [37] vuol dire risolvere il seguente problema:

trovare $u_N \in V_N$ t.c.

$$a_N(u_N, v_N) + (L_N u_N, \tau L_{N,\delta} v_N)_{N,\Omega} = \mathcal{F}_N(v_N) + (f, \tau L_{N,\delta} v_N)_{N,\Omega} \quad \forall v_N \in V_N, \quad (2.21)$$

dove:

$$L_{N,\delta} v_N = \delta \operatorname{div} I_N(\nu \nabla v_N) + \operatorname{div} I_N(\mathbf{b} v_N) + b_0 v_N \quad (2.22)$$

e:

$$\delta \in \{-1, 0, +1\}, \quad (2.23)$$

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{H}{2|\mathbf{b}(\mathbf{x})|_p} \xi(Pe(\mathbf{x})), \quad (2.24)$$

$$Pe(\mathbf{x}) = \frac{m|\mathbf{b}(\mathbf{x})|_p}{2\nu(\mathbf{x})N^2}, \quad (2.25)$$

$$\xi(Pe(\mathbf{x})) = \begin{cases} Pe(\mathbf{x}) & \text{se } 0 \leq Pe(\mathbf{x}) < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq Pe(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.26)$$

$$|\mathbf{b}(\mathbf{x})|_p = \begin{cases} (|b_1(\mathbf{x})|^p + |b_2(\mathbf{x})|^p)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,2} |b_i(\mathbf{x})| & \text{se } p = \infty, \end{cases} \quad (2.27)$$

e infine

$$0 \leq m \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{\tilde{C}} \right\}. \quad (2.28)$$

La costante \tilde{C} è la costante derivante dalla disuguaglianza inversa per metodi spettrali ([14]):

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} N^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.29)$$

Per $\delta = 0$ si ha il metodo *SUPG*, per $\delta = -1$ si ha il metodo *DW* e per $\delta = 1$ si ha il metodo *GALS*.

Per la dimostrazione di stabilità e di convergenza di tali schemi rimandiamo a [27].

Osservazione 2.2 Vale la pena di osservare che, diversamente a quanto viene definito per il metodo agli elementi finiti, si è introdotto nella definizione del numero di Péclet (2.25) un fattore N^{-2} . Tale posizione è giustificabile ricordando che nella disuguaglianza inversa per metodi spettrali si ha la presenza di un fattore N^2 nella maggiorazione della norma del gradiente. \square

Si è verificato sperimentalmente, così come previsto dall'osservazione 2.2, che la definizione del numero di Péclet (2.25), con una dipendenza di Pe da N^{-2} , comporta l'indipendenza del parametro m , presente in Pe , dal grado N di interpolazione spettrale. In figura (2.2) e nelle successive è mostrata la soluzione del problema (2.1) sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$ con viscosità $\nu = 10^{-4}$, campo $\mathbf{b} = (1, 1)$ e $b_0 = 0$, con dati $f \equiv 1$ e $g \equiv 0$ sul bordo $\partial\Omega$, per diversi valori del parametro N e per tre diversi valori del parametro di stabilizzazione m : un valore m_1 che porta ad avere $Pe(\mathbf{x}) > 1$, e due valori m_2 e m_3 tali per cui $Pe(\mathbf{x}) < 1$. Si osservi che quando $Pe > 1$ si ottengono sempre risultati sovradiffusi (si veda la colonna sinistra delle figure in Fig. 2.2), è quindi preferibile lavorare con valori di m tali per cui $Pe < 1$. D'altro canto, valori eccessivamente piccoli del parametro m conducono a soluzioni affette da oscillazioni spurie (si veda la terza colonna delle figure in Fig. 2.2). Nella seconda colonna in Fig. 2.2 sono presentati i risultati numerici ottenuti con un valore di $m = 2.d - 3$.

La presenza del termine stabilizzante non deteriora l'accuratezza dell'approssimazione utilizzata (si veda [27]) come si può osservare anche dalla figura (2.3) in cui è riportato l'errore relativo in norma H^1 per due soluzioni analitiche: a) $u(x, y) = \sin(4\pi x)\cos(4\pi y)$ e b) $u(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2}$ per il problema (2.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$, con $\nu = 1.d - 5$, $\mathbf{b} = (1, 1)$ e $b_0 = 0$. Sono state considerate condizioni di Dirichlet sul bordo $\partial\Omega$.

2.2.1 Interpretazione algebrica del problema stabilizzato

Il problema stabilizzato (2.21) in forma matriciale si presenta come:

$$A_{sp}^s \mathbf{u} = \mathbf{f}^s \quad (2.30)$$

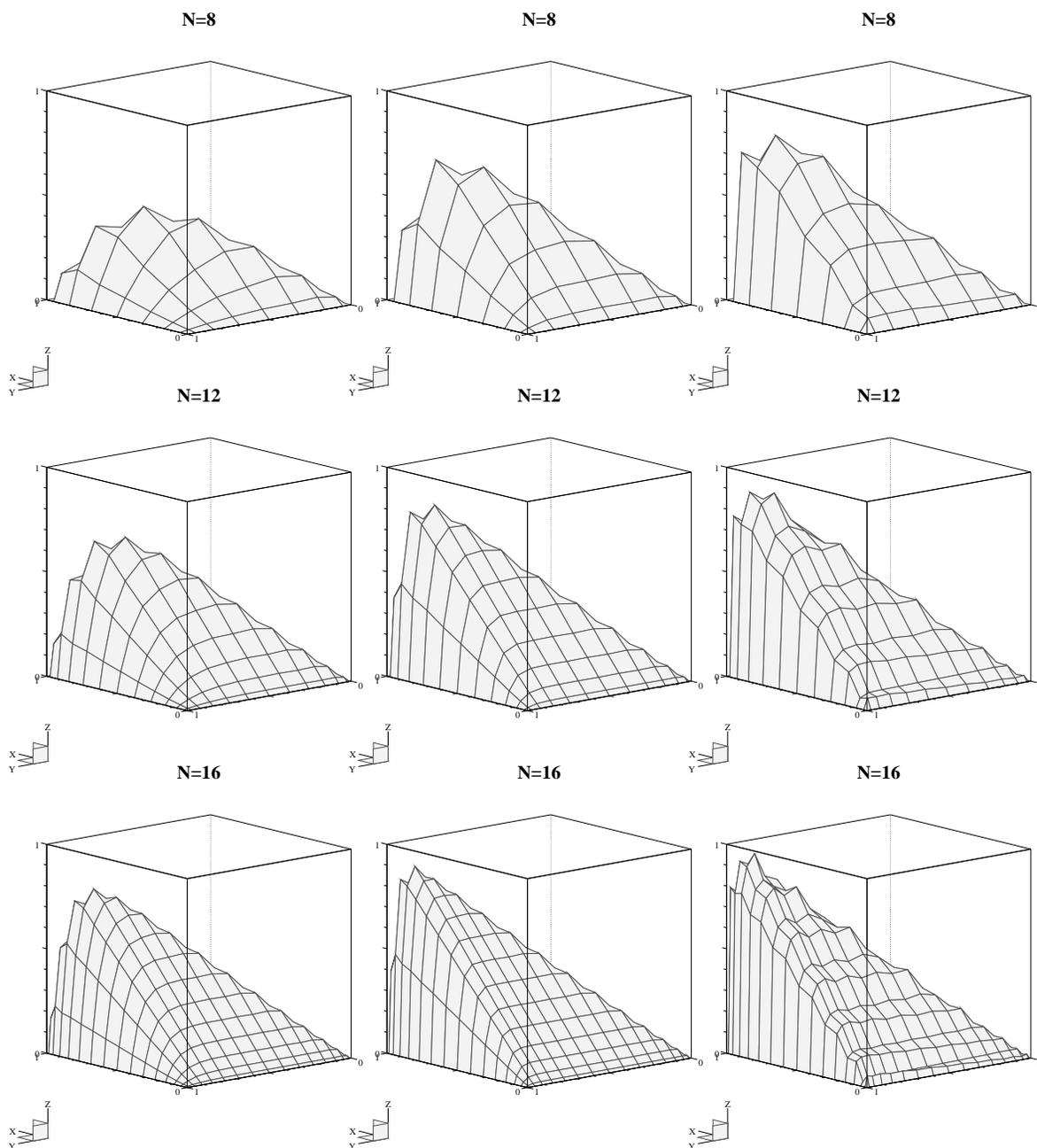


Figura 2.2: Soluzione numerica del problema (2.20) definito su $\Omega = (0,1)^2$ con $\nu = 1.d - 4$, $\mathbf{b} = (1,1)$, $b_0 = 0$, $f \equiv 1$, $g \equiv 0$. In prima colonna è riportata la soluzione calcolata per $m_1 = 5.d - 4$, in seconda colonna per $m_2 = 3.d - 4$ ed in terza colonna per $m_3 = 8.d - 5$.

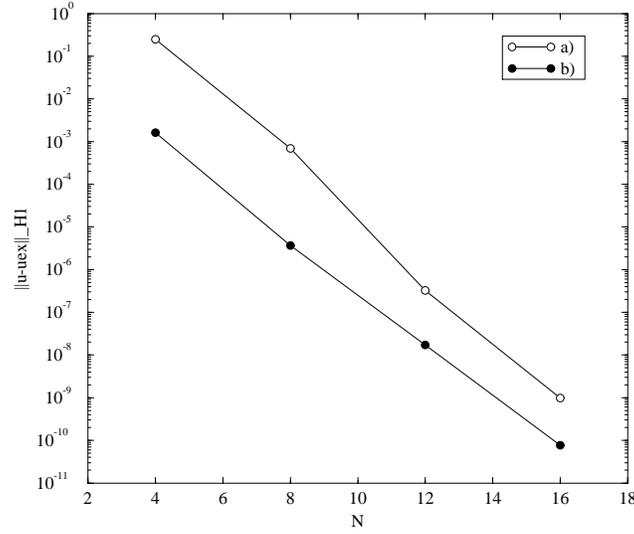


Figura 2.3: Errore relativo in norma H^1 per le soluzioni a) e b) relativamente al problema (2.1) stabilizzato con lo schema DW ($\delta = -1$), $m = 1.d - 5$ per la soluzione a), $m = 5.d - 3$ per la soluzione b).

dove

$$(A_{sp}^s)_{ij} = a_N(\varphi_j, \varphi_i) + (L_N \varphi_j, \tau L_{N,\delta} \varphi)_{N,\Omega} \quad i, j = 1, \dots, N_t \quad (2.31)$$

e

$$\mathbf{f}^s = [(f, \varphi_i + \tau L_{N,\delta} \varphi_i)_{N,\Omega}]_{i=1}^{N_t}. \quad (2.32)$$

Sia metodi iterativi che metodi diretti possono essere utilizzati per la risoluzione del sistema lineare (2.30). Come metodo diretto si propone ancora la fattorizzazione LU di Doolittle con scaling diagonale. Come metodo iterativo si è considerato lo schema BiCGStab opportunamente preconditionato.

Efficiente e ottimale anche in questo caso è il preconditionatore costruito sugli elementi spettrali bilineari. Per la presenza del termine stabilizzante nella matrice A_{sp}^s , è naturale introdurre il termine stabilizzante anche nel preconditionatore.

La matrice A_{sp}^s è preconditionata con la matrice seguente

$$(A_{\mathcal{H}}^s)_{ij} = (A_{\mathcal{H}})_{ij} + \sum_{T_k \in \mathcal{T}_H} (L_1 \psi_j, \tau_{\mathcal{H}} L_{1\delta} \psi_i)_{1,T_k} \quad i, j = 1, \dots, N_t \quad (2.33)$$

essendo \mathcal{T}_H la decomposizione del dominio Ω ottenuta sulla mesh \mathcal{M}_N dei nodi LGL in Ω definita nel paragrafo 1.3.3, $A_{\mathcal{H}}$ la matrice definita in (1.110) e ψ_i le funzioni della base (1.111).

Capitolo 3

I problemi parabolici di diffusione trasporto

In questo capitolo è affrontata la discretizzazione dei problemi parabolici ed in particolare del problema di diffusione trasporto evolutivo.

Quali metodi per la discretizzazione in tempo viene fatto un breve cenno agli schemi alle differenze finite, mentre si esporrà in termini dettagliati la teoria degli schemi cosiddetti a *passi frazionari* (o *Fractional Step*).

Sia Ω un dominio aperto quadrangolare in \mathbb{R}^2 di bordo $\partial\Omega$ e sia L l'operatore differenziale di diffusione trasporto definito in (2.2). Denotando con t la variabile temporale, ricordiamo che l'operatore differenziale

$$L_t = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + L. \quad (3.1)$$

è *parabolico*, essendo l'operatore L ellittico.

È assegnato il seguente problema ai valori iniziali ed al contorno: determinare $\forall t \in (0, T)$ la funzione u soluzione di

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega_D \times (0, T) \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u = h & \text{su } \partial\Omega_N \times (0, T) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Posto $V = H_{0,\partial\Omega_D}^1(\Omega)$, si definisce lo spazio

$$L^2(0, T; V) = \{v : (0, T) \rightarrow V \text{ misurabili t.c. } \int_0^T \|v(t)\|_V^2 < \infty\} \quad (3.3)$$

e lo spazio $\mathcal{C}^0((0, T); V)$ quale spazio delle funzioni $v : (0, T) \rightarrow V$ continue.

Presi $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $h \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega_N))$ e $u_0 \in V$, la formulazione variazionale del problema (3.2) si legge:

$$\forall t \in (0, T) \text{ determinare } u \in L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)) : \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v \, d\Omega + a(u(t), v) = \int_{\Omega} f(t)v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} h(t)v \, d\partial\Omega & \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

dove $a(\cdot, \cdot)$ è la forma bilineare definita in (2.4).

Il problema (3.4) ammette unica soluzione ([43], [36]).

Sul problema (3.4) si introduce la discretizzazione spettrale in spazio seguendo lo schema di Galerkin generalizzato introdotto nel capitolo 1.

Posto $V_N = V \cap \mathbb{Q}_N(\Omega)$ e preso $u_{0_N} \in V_N$, per ogni $t \in (0, T)$ si cerca una funzione $u_N(t) \in V_N$ tale che:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (u_N(t), v_N)_{N,\Omega} + a(u_N(t), v_N) = (f(t), v_N)_{N,\Omega} + (h(t), v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\ u_N(0) = u_{0_N} \end{cases} \quad \forall v_N \in V_N, \forall t \in (0, T) \quad (3.6)$$

dove a_N è la forma bilineare definita in (2.10) e $(\cdot, \cdot)_{N,\Omega}$ rappresenta il prodotto scalare discreto introdotto in (1.41).

Si dimostra ([57]) che l'approssimazione spettrale discreta sullo schema di Galerkin generalizzato (3.6) è stabile e convergente e, nel caso $\partial\Omega_D \equiv \partial\Omega$ si ha la seguente stima in energia:

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_N(t)\|_N^2 + \bar{\alpha} \int_0^T \|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 4 \left(\|u_0\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 + \frac{9}{\bar{\alpha}} \int_0^T \|f(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \right) \quad (3.7)$$

dove $\bar{\alpha}$ è la costante di uniforme coercività della forma bilineare a_N .

3.1 Interpretazione algebrica

Sostituendo a $v_N \in V_N$ le funzioni φ_i della base di Lagrange definita sui nodi LGL in Ω , si pone:

$$\mathbf{f}(t) = \left[(f(t), \varphi_i)_{N,\Omega} + (h(t), \varphi_i)_{N,\partial\Omega_N} \right]_{i=1}^{N_t} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{u}_0 = [u_{0i}]_{i=1}^{N_t} \quad (3.9)$$

e riprendendo le definizioni (2.16) di A_{sp} e (1.113) di M si perviene al problema semidiscreto

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) \\ M \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + A_{sp} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \forall t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2 Discretizzazione in tempo

Fissato $\Delta t > 0$, nell'intervallo temporale $(0, T)$ vengono presi i valori $t_n = t_0 + n\Delta t$, con $t_0 = 0$ e $n = 1, \dots, \frac{T}{\Delta t}$.

Denotando con $u^n = \mathbf{u}(t^n)$ si consideri uno schema alle differenze finite per discretizzare in tempo il problema semidiscreto (3.10). Si prenda ad esempio lo schema di *Eulero implicito* del primo ordine e incondizionatamente stabile. Il sistema (3.10) diventa:

$$\begin{cases} u^0 = \mathbf{u}(0) \\ M \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} + A_{sp} u^n = f^n \quad \forall n = 1, \dots, \frac{T}{\Delta t}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ad ogni livello temporale t^n il sistema (3.11) è un sistema lineare con incognita u^n :

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + A_{sp} \right) u^n = f^n + \frac{M}{\Delta t} u^{n-1}. \quad (3.12)$$

Essendo M una matrice diagonale (per l'ortogonalità delle funzioni di base di Lagrange), il termine $\frac{M}{\Delta t}$ non altera la struttura della matrice A_{sp} .

Per la risoluzione del sistema (3.12) possono essere utilizzati i metodi di cui si è già discusso nei capitoli precedenti. Si osservi che per il problema (3.11), dovendo

risolvere più volte un sistema lineare con una matrice indipendente dal tempo, è preferibile fattorizzare la matrice stessa in testa all'algoritmo e risolvere ad ogni passo temporale due sistemi triangolari con un costo computazionale complessivo di N_t^2 operazioni.

È tuttavia possibile che per un basso numero di iterazioni si presenti opportuno risolvere il sistema (3.12) con un metodo iterativo opportunamente preconditionato.

Accanto allo schema Eulero implicito possono essere considerati altri schemi alle differenze finite di ordine più elevato, quali ad esempio lo schema (sempre implicito) di Cranck Nicolson, o schemi espliciti Adams-Bashforth.

3.3 Gli schemi a passi frazionari (Fractional Step)

Gli schemi a passi frazionari si basano sull'idea di dividere un operatore differenziale nella somma di termini di forma più semplice e di ridurre la risoluzione del problema originario ad una sequenza di sottoproblemi di minore complessità .

Questi schemi sono utilizzati sia per ridurre problemi stazionari definiti su geometrie bi- o tri-dimensionali ad una sequenza di problemi monodimensionali (ne è un esempio il metodo delle *direzioni alternate* (ADI) di Peaceman e Rachford) oppure per suddividere il problema differenziale in termini di problemi modello più "semplici".

Nell'ultimo caso il passo temporale è suddiviso in due o più sottopassi così che le soluzioni intermedie vengono calcolate mediante l'inversione di una sola parte dell'operatore originale. La suddivisione dell'operatore differenziale può essere effettuata sia a livello differenziale sia a livello algebrico. Nel primo caso lo scopo è quello di riformulare il problema come una successione di problemi differenziali ben definiti con proprie condizioni al bordo. Nel secondo caso la suddivisione, o "splitting", dell'operatore è svolto sulla struttura algebrica ottenuta dopo una opportuna approssimazione in spazio.

In questa tesi ci si è occupati di uno splitting di tipo differenziale, con l'obiettivo di estendere alcuni schemi, definiti per splitting di tipo algebrico, a problemi differenziali con condizioni al bordo di tipo non omogeneo. Infatti, si osserva che gli schemi a passi frazionari definiti per splitting algebrici possono essere applicati senza alcuna difficoltà a problemi differenziali con condizioni al bordo di tipo Dirichlet omogeneo.

In letteratura sono noti diversi schemi, e spesso essi sono presentati per splitting di tipo algebrico. In questo primo paragrafo verranno presentati questi schemi nella

loro forma classica relativamente ad un problema parabolico del tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.13)$$

dove A è la matrice associata alla discretizzazione del problema differenziale sul dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. In un secondo momento essi verranno presentati relativamente a splitting di tipo differenziale sul problema di diffusione trasporto (3.2).

Si suddivida la matrice A in M parti A_1, A_2, \dots, A_M tali che

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_M, \quad A_j \text{ siano definite positive.} \quad (3.14)$$

Un esempio di schema fractional step applicato al problema (3.13) è il seguente, noto come schema di Yanenko ([47]):

$\forall n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$ determinare la funzione u^{n+1} :

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ \frac{u^{n+1/M} - u^n}{\Delta t/M} + A_1 u^n = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(M-1)/M}}{\Delta t/M} + A_M u^{n+(M-1)/M} = f^n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Questo è uno schema a M passi (come il numero delle componenti di A), e la soluzione al passo frazionario $n + j/M$ è calcolata risolvendo un sistema lineare di matrice A_j .

Al fine di studiare la convergenza di questi schemi è necessario studiarne la stabilità e la consistenza.

3.3.1 Analisi di stabilità e convergenza

Per lo studio della stabilità di questi metodi richiamiamo brevemente l'analisi di Fourier ([47]).

Sia $\Delta t > 0$ il passo temporale della discretizzazione, e sia $n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$ tale che

$$u^n = u(t_n) = u(t_0 + n \cdot \Delta t). \quad (3.16)$$

Si introduce la seguente discretizzazione in tempo per il problema (3.13)

$$\begin{cases} u^{n+1} = Tu^n + \alpha \Delta t F^n & n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1 \\ u^0 = u_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

l'operatore lineare T è detto *operatore di iterazione*, α è un parametro reale positivo e $F^n := Sf^n$ è l'immagine del termine di sorgente f^n mediante l'*operatore di sorgente* S .

Si osserva che ogni schema a passi frazionari può essere riscritto nella forma (3.17) eliminando opportunamente le soluzioni ai passi intermedi. La scelta degli operatori T e S determina la scelta dello schema fractional step e viceversa. Ne segue che lo studio di uno schema a passi frazionari può essere ricondotto allo studio dello schema (3.17) e degli operatori T e S .

Secondo l'analisi di Fourier, studiare la stabilità di un schema fractional step vuol dire analizzare lo spettro dell'operatore T . Sia T definito su uno spazio di Hilbert V e si considerino u^n , u_0 e $F^n \in V$. Denotiamo con λ l'autovalore generico del problema

$$T\varphi = \lambda\varphi \quad (3.18)$$

e con λ^* l'autovalore generico del problema aggiunto

$$T^*\varphi^* = \lambda^*\varphi^*. \quad (3.19)$$

Questi due problemi determinano due sistemi di autovalori $\{\lambda_j\}$ e $\{\lambda_j^*\}$ ed i corrispondenti sistemi di autofunzioni $\{\varphi_j\}$ e $\{\varphi_j^*\}$ completi nello spazio V e ortonormalizzati rispetto al prodotto scalare (\cdot, \cdot) definito in V .

Le funzioni u^n , u_0 e F^n possono essere rappresentate mediante serie di Fourier in funzione delle autofunzioni:

$$u^n = \sum_j u_j^n \varphi_j, \quad u_0 = \sum_j u_{0j} \varphi_j, \quad F^n = \sum_j F_j^n \varphi_j \quad (3.20)$$

con

$$u_j^n = (u^n, \varphi_j^*), \quad u_{0j} = (u_0, \varphi_j^*), \quad F_j^n = (F^n, \varphi_j^*). \quad (3.21)$$

Lo schema (3.17) è detto *computazionalmente stabile* se, per ogni n tale che per $n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$ vale la seguente relazione:

$$|u_j^n| \leq C_{1j}|u_{0j}| + C_{2j} \max_n |F_j^n| \quad (3.22)$$

dove C_{1j} e C_{2j} sono costanti uniformemente limitate per $j \leq \frac{T}{\Delta t}$.

Per il problema agli autovalori (3.18) lo schema (3.17) si legge:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \lambda_j u_j^n + \alpha \Delta t F_j^n & \forall n \geq 0 \\ u_j^0 = u_{0j} \end{cases} \quad (3.23)$$

ed eliminando successivamente le incognite u_j^n si ha:

$$u_j^{n+1} = (\lambda_j)^n u_{0j} + \alpha \Delta t \sum_{k=1}^n (\lambda_j)^{n-k} F_j^{k-1} \quad (3.24)$$

e quindi

$$|u_j^{n+1}| \leq |\lambda_j|^n |u_{0j}| + \alpha \Delta t \frac{1 - |\lambda_j|^n}{1 - |\lambda_j|} |\tilde{F}_j| \quad (3.25)$$

dove $|\tilde{F}_j| = \max_n |F_j^n|$.

Questa è una condizione di stabilità per lo schema (3.17) ed è soddisfatta su un intervallo di dimensione finita se la relazione

$$|\lambda_j| < 1 + C \Delta t \quad C = \text{cost.} > 0 \quad (3.26)$$

vale per ogni autovalore di T .

Se la costante C risulta indipendente dal parametro della discretizzazione spaziale, (N nel nostro caso), si dice che lo schema fractional step è *assolutamente stabile*, altrimenti si parla di *stabilità condizionata* e si avrà una relazione del tipo $\Delta t \leq CN^p$ con $p \in \mathbb{R}$.

Si ha il seguente teorema di stabilità per schemi fractional step (per la dimostrazione rimandiamo a [47]):

Teorema 3.1 Sia assegnato il problema (3.13) e si consideri il seguente splitting

$A = \sum_{j=1}^M A_j$. Se le matrici A_j , per $j = 1, \dots, M$, commutano e generano una base comune di autofunzioni e se gli autovalori delle matrici A_j sono non negativi, allora lo schema (3.17) è assolutamente stabile. \square

Anche lo studio della consistenza e dell'accuratezza di uno schema fractional step può essere ricondotto allo studio della consistenza e dell'accuratezza del problema (3.17).

Così uno schema fractionale step è detto *consistente* se lo è lo schema (3.17) corrispondente. Inoltre se lo schema (3.17) ha ordine di accuratezza p si dirà che anche lo schema fractional step corrispondente ha ordine di accuratezza p .

Ora introduciamo gli schemi fractional step di cui faremo uso per l'approssimazione del problema parabolico di diffusione trasporto.

Peaceman-Rachford (PR)

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\Delta t/2} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^n = f^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_2 u^{n+1} + A_1 u^{n+1/2} = f^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.27)$$

Douglas-Rachford (DR)

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\Delta t} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^n = f^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\Delta t} + A_2 u^{n+1} = A_2 u^n \end{cases} \quad (3.28)$$

θ -metodo

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\theta}-u^n}{\theta\Delta t} + A_1 u^{n+\theta} + A_2 u^n = f^{n+\theta} \\ \frac{u^{n+1-\theta}-u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_2 u^{n+1-\theta} + A_1 u^{n+\theta} = f^{n+\theta} \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + A_1 u^{n+1} + A_2 u^{n+1-\theta} = f^{n+1} \end{cases} \quad (3.29)$$

con $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Gli schemi (PR) e (DR) sono due casi particolari del seguente schema più generale:

schema Il'in

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\kappa} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^n = f^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\kappa} + A_2(u^{n+1} - u^n) = \rho \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\kappa} \end{cases} \quad (3.30)$$

con $\kappa = \frac{\Delta t}{1+\rho}$. Se $\rho = 1$ si ritrova lo schema Peaceman-Rachford, mentre se $\rho = 0$ si ha lo schema Douglas-Rachford.

L'operatore di iterazione per i tre schemi PR (3.27), DR (3.28) e θ metodo (3.29) è:

$$T_{PR} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_2 \right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_1 \right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_1 \right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_2 \right), \quad (3.31)$$

$$T_{DR} = (I + \Delta t A_2)^{-1} [(I + \Delta t A_1)^{-1} (I - \Delta t A_2) + \Delta t A_2], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} T_\theta = & (I + \theta \Delta t A_1)^{-1} (I - \theta \Delta t A_2) (I + (1 - 2\theta) \Delta t A_2)^{-1} \\ & (I + (1 - 2\theta) \Delta t A_1) (I + \theta \Delta t A_1)^{-1} (I - \theta \Delta t A_2), \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove I denota la matrice identità.

Qualora le matrici A_1 e A_2 commutino, abbiano un sistema comune di autovettori ed i loro autovalori siano non negativi, il teorema 3.1 assicura stabilità assoluta agli schemi PR, DR e θ metodo.

Per quanto riguarda la convergenza degli schemi si osserva quanto segue.

Si consideri lo schema Il'in, di cui lo schema PR e lo schema DR sono casi particolari, si ha il seguente teorema:

Teorema 3.2 Lo schema Il'in è del secondo ordine in Δt se $\rho = 1$, del primo ordine in Δt se $\rho = 0$.

Dimostrazione. Si sommino i due passi dello schema (3.30),

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\kappa} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^{n+1} = f^{n+1/2} + \rho \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\kappa}. \quad (3.34)$$

Si isoli $u^{n+1/2}$ dal primo passo dello schema (3.30), si ottiene:

$$u^{n+1/2} = \left(\frac{I}{\kappa} + A_1 \right)^{-1} \left[\left(\frac{I}{\kappa} - A_2 \right) u^n + f^{n+1/2} \right] \quad (3.35)$$

e si sostituisca $u^{n+1/2}$ in (3.34). Poichè A_1 e $\left(\frac{I}{\kappa} + A_1\right)^{-1}$ commutano si ha:

$$\left(\frac{I}{\kappa} + A_1\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\kappa} + A_1 \left(\frac{I}{\kappa} - A_2\right) u^n + A_1 f^{n+1/2} + \left(\frac{I}{\kappa} + A_1\right) A_2 u^{n+1} = (3.36)$$

$$\left(\frac{I}{\kappa} + A_1\right) f^{n+1/2} + \rho \left[\left(\frac{I}{\kappa} - A_2\right) u^n + f^{n+1/2} \right] - \frac{\rho}{\kappa} \left(\frac{I}{\kappa} + A_1\right) u^n (3.37)$$

da cui

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{\rho + 1} A_1 u^{n+1} + \frac{\rho}{\rho + 1} A_2 u^n = (3.38)$$

$$f^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{1 + \rho} A_1 A_2 \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right). (3.39)$$

Se $\rho = 1$ si ottiene lo schema Crank-Nicolson a meno di un fattore del secondo ordine in Δt , quindi uno schema del secondo ordine, mentre se $\rho = 0$ si ottiene lo schema Eulero implicito, ovvero uno schema del primo ordine in Δt . \square

Per quanto riguarda il θ metodo, se gli autovalori di A_1 e A_2 sono in modulo minori di 1 si ha:

$$(I + \alpha A_i)^{-1} = I - \alpha A_i + \alpha^2 A_i^2 + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad i = 1, 2 (3.40)$$

ed eliminando le soluzioni frazionarie si ottiene:

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t A^n + \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^{n+\theta} + (3.41)$$

$$\Delta t^2 [\theta(2\theta) + (1 - \theta)^2 A_2] A u^n + (3.42)$$

$$\Delta t^2 [-\theta^2 A_1 f^{n+1} + 2\theta(\theta - 1) A_1 f^{n+\theta} + (7\theta^2 - 6\theta + 1) A_2 f^{n+\theta}]. (3.43)$$

Confrontando tale schema con lo schema di Crank-Nicolson si deduce che per avere un secondo ordine in Δt si deve avere $\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3.2 Lo splitting sull'operatore di diffusione trasporto

Si consideri il problema parabolico di diffusione trasporto (3.2) introdotto nel capitolo 2. Per poter applicare gli schemi fractional step sopra esposti al problema

(3.10), l'operatore di diffusione trasporto $L = -\operatorname{div}(\nu\nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0u$ viene suddiviso nella somma di due operatori L_1 e L_2 tali che:

$$L = L_1 + L_2, \quad (3.44)$$

$$L_1u = -\operatorname{div}(\nu\nabla u) \quad (3.45)$$

$$L_2u = \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0u \quad (3.46)$$

a cui sono associate rispettivamente le forme bilineari

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (3.47)$$

e

$$a_2(u, v) = -\int_{\Omega} \mathbf{b}u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} b_0uv \, d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (3.48)$$

Accanto al problema (3.2) può essere considerato anche il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nu\nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0u = f & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega_D \times (0, T) \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = h_e & \text{su } \partial\Omega_N \times (0, T) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.49)$$

cui è associata la forma bilineare

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0u)v \, d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (3.50)$$

Anche per il problema (3.49) si ha $L = L_1 + L_2$ con L_1 e L_2 definiti in (3.44), ma, mentre la forma bilineare associata all'operatore L_1 è la stessa definita per il problema (3.2) (poniamo $\tilde{a}_1(u, v) = a_1(u, v)$), la forma bilineare associata all'operatore L_2 può essere formalmente scritta come

$$\tilde{a}_2(u, v) = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{b}u) + b_0u)v \, d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (3.51)$$

Si considerino le notazioni introdotte nel paragrafo 1.2, nel capitolo 2 e nel paragrafo 3.1, inerenti all'approssimazione spettrale.

Le forme bilineari a_1 , a_2 , \tilde{a}_1 e \tilde{a}_2 vengono approssimate dalle seguenti forme bilineari discrete:

$$a_{1N}(u_N, v_N) = (\nu \nabla u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} \quad (3.52)$$

$$a_{2N}(u_N, v_N) = -(\mathbf{b}u_N, \nabla v_N)_{N,\Omega} \quad (3.53)$$

$$\tilde{a}_{1N}(u_N, v_N) = a_{1N}(u_N, v_N) \quad (3.54)$$

$$\tilde{a}_{2N}(u_N, v_N) = (\operatorname{div} I_N(\mathbf{b}u_N), v_N)_{N,\Omega}. \quad (3.55)$$

dove $I_N u$ rappresenta il polinomio algebrico di grado N interpolante la funzione u nei nodi di quadratura LGL (1.40).

Posto $V = H^1_{0,\partial\Omega_D}(\Omega)$ si pone $V_N = V \cap \mathbb{Q}_N(\Omega)$.

Si osserva che, quando all'interno di uno schema fractional step si deve risolvere un sistema sull'operatore L_1 , vuol dire risolvere un problema ellittico discreto del tipo

determinare $u_N \in V_N$:

$$\begin{aligned} a_{1N}(u_N, v_N) + (\alpha u_N, v_N)_{N,\Omega} + (\beta u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_N} = \\ (f, v_N)_{N,\Omega} + (h, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \quad \forall v_N \in V_N \end{aligned} \quad (3.56)$$

dove f e h sono funzioni note, α e β sono parametri positivi costanti.

Quando invece si deve risolvere un sistema sull'operatore L_2 bisogna risolvere un problema di tipo iperbolico.

Per un problema iperbolico si definisce una *frontiera di inflow* $\partial\Omega_{in}$:

$$\partial\Omega_{in} := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\} \quad (3.57)$$

ed una *frontiera di outflow* $\partial\Omega_{out} = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{in}$.

Su $\partial\Omega_{in}$ è assegnata una condizione di inflow, mentre su $\partial\Omega_{out}$ non viene assegnato alcun tipo di condizione. A seconda della scelta del problema (3.2) o (3.49), e quindi della forma bilineare a_{2N} o \tilde{a}_{2N} , si ha rispettivamente:

determinare $u_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a_{2N}(u_N, v_N) + (\alpha u_N, v_N)_{N,\Omega} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\ (f, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} + (h, v_N)_{N,\partial\Omega} \quad \forall v_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega), \end{aligned} \quad (3.58)$$

oppure

$$\begin{aligned} & \text{determinare } u_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega) : \\ & \tilde{a}_{2N}(u_N, v_N) + (\alpha u_N, v_N)_{N,\Omega} = \\ & (f, v_N)_{N,\Omega} + (g - u_N, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} + (h, v)_{N,\partial\Omega} \quad \forall v_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Nel problema (3.58) si ha una condizione naturale sulla frontiera di inflow , mentre nel problema (3.59) la condizione di inflow è imposta in forma esplicita .

Osservazione 3.1 Si osserva che a priori non esiste relazione tra $\partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_{in}$, poichè il problema originario è un problema di diffusione-trasporto per il quale non è definita una frontiera di inflow. Tuttavia, all'interno di uno splitting dell'operatore, il problema iperbolico deve essere ben definito, ovvero deve presentare condizioni ben definite sulla frontiera $\partial\Omega_{in}$. Del resto ci si chiede: se $\partial\Omega_{in} \not\subset \partial\Omega_D$, quali condizioni di inflow vengono assegnate per il problema iperbolico sull'operatore L_2 ? Possono essere seguiti due approcci. Il primo consiste nell'assegnare come dato sulla frontiera $\partial\Omega_{in}$ la soluzione del problema ellittico al passo temporale precedente, e questo è possibile anche se $\partial\Omega_{in}$ non è contenuto in $\partial\Omega_D$.

Il secondo consiste nel richiedere che $\partial\Omega_{in} \subset \partial\Omega_D$. Si osserva che il primo approccio non richiede ipotesi particolari al problema, ma una tale scelta implica che, qualunque schema venga utilizzato per l'approssimazione in tempo, l'ordine di accuratezza in Δt non può mai essere maggiore di uno. Al contrario il secondo approccio richiede particolari condizioni aggiuntive sui dati del problema, ma non determina un degrado dell'ordine di accuratezza dello schema fractional step. \square

3.3.3 Gli schemi a passi frazionari applicati allo splitting sull'operatore di diffusione trasporto

In questo paragrafo vengono proposte alcune varianti degli schemi a passi frazionari presentati nel paragrafo 3.3.1 relativamente allo splitting differenziale dell'operatore di diffusione trasporto esposto nel paragrafo precedente.

In vista dell'osservazione (3.1) si supponga che $\partial\Omega_{in} \subset \partial\Omega_D$.

Dapprima consideriamo il passo ellittico (denominiamo “ellittici” quei passi nei quali si avanza con l'operatore ellittico L_1 e “iperbolici” quei passi in cui si avanza con l'operatore iperbolico L_2).

Denotiamo con k_1 , k_2 e k_3 tre livelli temporali frazionari successivi e poniamo $\tau_1 = (k_2 - k_1)\Delta t$ e $\tau_2 = (k_3 - k_2)\Delta t$. Ad esempio nello schema *PR* o *DR* si ha

$k_1 = n$, $k_2 = n + \frac{1}{2}$ e $k_3 = n + 1$ con $\tau_1 = \tau_2 = \frac{\Delta t}{2}$; mentre per i primi due passi del θ -method si ha $k_1 = n$, $k_2 = n + \theta$, $k_3 = n + 1 - \theta$, $\tau_1 = \theta\Delta t$ e $\tau_2 = (1 - 2\theta)\Delta t$. Si propongono due approcci (R1 e R2) per il problema (3.2) (cui sono associate le forme bilineari a_{1N} e a_{2N}) e due approcci (DN e D) per il problema (3.49) (cui sono associate le forme bilineari \tilde{a}_{1N} e \tilde{a}_{2N}).

Primo approccio (R1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Passo ellittico} \\ \frac{1}{\tau}(u_N^{k_2} - u_N^{k_1}, v_N)_{N,\Omega} + a_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) = \\ (f^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} - a_{2N}(u_N^{k_1}, v_N) + (h^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\ u_N^{k_2} = 0 \text{ su } \partial\Omega_D \\ \\ \text{Passo iperbolico} \\ \frac{1}{\tau}(u_N^{k_3} - u_N^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} + a_{2N}(u_N^{k_3}, v_N) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\ = (f^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}g^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - a_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) + \left(\nu \frac{\partial u_N^{k_2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

In questo schema la condizione imposta sul bordo $\partial\Omega_N$ al passo ellittico è una condizione naturale per la forma a_{1N} valutata al nuovo livello temporale (k_2). Come si vedrà nel prossimo paragrafo, questo approccio ha un ordine di accuratezza uguale a uno e, quando è applicato a schemi del secondo ordine, come *PR* o θ -method, esso degrada di un ordine di accuratezza gli schemi stessi.

Secondo approccio (R2)

$$\left\{ \begin{array}{l}
\textit{Passo ellittico} \\
\frac{1}{\tau}(u_N^{k_2} - u_N^{k_1}, v_N)_{N,\Omega} + a_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} = \\
(f^{k_2}, v_N) - a_{2N}(u_N^{k_1}, v_N) + (h^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_1}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\
u_N^{k_2} = 0 \text{ su } \partial\Omega_D \\
\textit{Passo iperbolico} \\
\frac{1}{\tau}(u_N^{k_3} - u_N^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} + a_{2N}(u_N^{k_3}, v_N) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\
= (f^{k_1}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}g^{k_3}, u_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - a_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) + \left(\nu \frac{\partial u_N^{k_2}}{\partial n}, v_N\right)_{N,\partial\Omega}.
\end{array} \right. \quad (3.61)$$

In questo schema i termini $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_N}$ e $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N}$, valutati al passo iperbolico, sono stati sottratti rispettivamente dal termine sinistro e dal termine destro dell'equazione al fine di ottenere la condizione naturale per il problema (3.2) al livello temporale t_{k_3} e nello stesso tempo la condizione naturale per la forma bilineare a_{2N} al tempo t_{k_2} . Questo approccio non degrada l'ordine di accuratezza dello schema fractional step a cui venga applicato.

Sul problema (3.49) vengono ora presentati due approcci, entrambi non degradano l'ordine di accuratezza dello schema cui vengono applicati.

Terzo approccio (DN)

$$\left\{ \begin{array}{l}
\textit{Passo ellittico} \\
\frac{1}{\tau}(u_N^{k_2} - u_N^{k_1}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) = \\
= (f^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{2N}(u_N^{k_1}, v_N) + (h_e^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\
u_N^{k_2} = 0 \text{ su } \partial\Omega_D \\
\textit{Passo iperbolico} \\
\frac{1}{\tau}(u_N^{k_3} - u_N^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{2N}(u_N^{k_3}, v_N) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}u_N^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} = \\
= (f^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}g^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - \tilde{a}_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) + \left(\nu \frac{\partial u_N^{k_2}}{\partial n}, v_N\right)_{N,\partial\Omega}.
\end{array} \right. \quad (3.62)$$

Si osservi che nel passo ellittico di questo schema non sussiste legame tra la parte ellittica dell'operatore e la parte iperbolica.

Infine si ha:

Quarto approccio (D)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Passo ellittico} \\
 \frac{1}{\tau}(u_N^{k_2} - u_N^{k_1}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) = \\
 = (f^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} - \tilde{a}_{2N}(u_N^{k_1}, v_N) + (h_e^{k_2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\
 u_N^{k_2} = 0 \text{ su } \partial\Omega_D \\
 \\
 \text{Passo iperbolico} \\
 \frac{1}{\tau}(u_N^{k_3} - u_N^{k_2}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{2N}(u_N^{k_3}, v_N) + (u_N^{k_3}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} = \\
 = (f^{k_3}, v_N)_{N,\Omega} + (g^{k_3}, u_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - \tilde{a}_{1N}(u_N^{k_2}, v_N) + \left(\nu \frac{\partial u_N^{k_2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega} .
 \end{array} \right. \quad (3.63)$$

3.3.4 Applicazione allo schema PR

Gli approcci R1, R2, DN e D presentati nel paragrafo precedente vengono qui applicati allo schema Peaceman-Rachford, e su questo esempio ne mostreremo la consistenza e l'accuratezza. Discorso analogo può essere svolto con gli schemi DR e θ -method.

Sia M la matrice delle masse (1.113) introdotta nel primo capitolo, sia $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_t}$ la base di Lagrange definita sui nodi LGL e sia $N_t = (N + 1)^2$.

Definiamo le seguenti matrici

$$\begin{aligned}
 (A_1)_{ij} &= a_{1N}(\varphi_j, \varphi_i) \quad i, j = 1, \dots, N_t \\
 (A_2)_{ij} &= a_{2N}(\varphi_j, \varphi_i) \quad i, j = 1, \dots, N_t \\
 (\tilde{A}_1)_{ij} &= \tilde{a}_{1N}(\varphi_j, \varphi_i) \quad i, j = 1, \dots, N_t \\
 (\tilde{A}_2)_{ij} &= \tilde{a}_{2N}(\varphi_j, \varphi_i) \quad i, j = 1, \dots, N_t.
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Schema PR - approccio R1

per $n = 0, \dots, T/\Delta t - 1$ determinare $u_N^{n+1} \in V_N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1/2} - u_N^n, v_N)_{N,\Omega} + a_{1N} (u_N^{n+1/2}, v_N) = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - a_{2N} (u_N^n, v_N) + (h^{n+1/2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\ u_N^{n+1/2} = g(t_{n+1/2}) \quad \text{su } \partial\Omega_D \\ \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1} - u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + a_{2N} (u_N^{n+1}, v_N) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} g^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - a_{1N} (u_N^{n+1/2}, v_N) + \\ + \left(\nu \frac{\partial u_N^{n+1/2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega} \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Teorema 3.3 Lo schema PR-R1 (3.65) è consistente ed è accurato al primo ordine in Δt .

Dimostrazione. Poichè la condizione al bordo di Dirichlet imposta al primo passo dello schema non degrada l'ordine dello schema (essa è imposta esattamente), si può pensare di sostituire la condizione di Dirichlet su $\partial\Omega_D$ con l'intera equazione.

Sommando i due passi dello schema (3.65) e ricordando che $h = \nu \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u$, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1} - u_N^n, v_N)_{N,\Omega} + 2a_{1N} (u_N^{n+1/2}, v_N) + a_{2N} (u_N^{n+1} + u_N^n, v_N) = \\ & = 2(f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + 2 \left(\nu \frac{\partial u_N^{1/2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega_N} \\ & - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Si ponga

$$f^n = (f^n, v_N)_{N,\Omega}, \quad (3.67)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \left(\nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}, \varphi_i \right)_{N,\partial\Omega_N} & \text{se } \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_N \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$B_{ij}^\Sigma = \begin{cases} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \varphi_j, \varphi_i)_{N,\Sigma} & \text{se } \mathbf{x}_i \in \Sigma \quad \text{per } \Sigma \subset \partial\Omega \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \quad (3.69)$$

e si definiscano le matrici

$$C_1 = A_1 + D \quad C_2 = A_2 + B^{\partial\Omega}. \quad (3.70)$$

Lo schema (3.66) può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} M(u_N^{n+1/2} - u_N^n) + 2C_1 u_N^{n+1/2} + C_2(u_N^{n+1} + u_N^n) = \\ 2f^{n+1/2} - B^{\partial\Omega_N} u_N^{n+1/2} - B^{\partial\Omega_N} u_N^n \end{aligned} \quad (3.71)$$

A questo punto, eliminando la soluzione intermedia si ottiene il seguente schema ad un passo:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2} [C_1(u_N^{n+1} + u_N^n) + C_2(u_N^{n+1} + u_N^n)] = \\ f^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4} C_1 M^{-1} C_2 \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t}\right) + \\ - \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{2I}{\Delta t} - M^{-1} C_1\right) B^{\partial\Omega_N} \cdot \left[u_N^n - \left(\frac{2I}{\Delta t} - M^{-1} C_1\right)^{-1} \right. \\ \left. \left(\frac{2u_N^{n+1}}{\Delta t} + M^{-1} C_2 u_N^{n+1} - M^{-1} f^{n+1/2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

che è uno schema del primo ordine in Δt . \square

L'approccio R2 applicato sempre allo schema PR genera il seguente schema:

Schema PR - approccio R2

per $n = 0, \dots, T/\Delta t - 1$ determinare $u_N^{n+1} \in V_N$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1/2} - u_N^n, v_N)_{N,\Omega} + a_{1N} (u_N^{n+1/2}, v_N) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - a_{2N} (u_N^n, v_N) + (h^{n+1/2} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^n, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\ u_N^{n+1/2} = g(t_{n+1/2}) \quad \text{su } \partial\Omega_D \\ \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1} - u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + a_{2N} (u_N^{n+1}, v_N) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} g^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - a_{1N} (u_N^{n+1/2}, v_N) + \\ + \left(\nu \frac{\partial u_N^{n+1/2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega} \end{aligned} \right. \quad (3.73)$$

Teorema 3.4 Lo schema PR-R2 (3.73) è consistente ed è accurato al secondo ordine in Δt .

Dimostrazione. Come è stato fatto per lo schema precedente, sommando i due passi dello schema (3.73), considerando le matrici C_1 , C_2 , D e $B^{\partial\Omega}$ introdotte sopra ed eliminando la soluzione frazionaria si ottiene il seguente schema ad un passo:

$$\begin{aligned} M \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [C_1(u_N^{n+1} + u_N^n) + C_2(u_N^{n+1} + u_N^n)] = \\ = f^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4} C_1 M^{-1} C_2 \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} \right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

che è lo schema di Crank-Nicolson a meno di un fattore del secondo ordine in Δt . Segue l'accuratezza al secondo ordine in Δt per lo schema PR-R2. \square

Introduciamo ora lo schema PR con gli approcci DN e D.

Schema PR - approccio DN

per $n = 0, \dots, T/\Delta t - 1$ determinare $u_N^{n+1} \in V_N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1/2} - u_N^n, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{1N}(u_N^{n+1/2}, v_N) = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - \tilde{a}_{2N}(u_N^n, v_N) + (h^{n+1/2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\ u_N^{n+1/2} = g(t_{n+1/2}) \quad \text{on } \partial\Omega_D \\ \frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1} - u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{2N}(u_N^{n+1}, v_N) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u_N^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{out}} = \\ = (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} g^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - \tilde{a}_{2N}(u_N^{n+1/2}, v_N) + \\ + \left(\nu \frac{\partial u_N^{n+1/2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega} \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Teorema 3.5 Lo schema PR-DN (3.75) è consistente ed è accurato al secondo ordine in Δt .

Dimostrazione. Sommando i due passi, eliminando la soluzione frazionaria ed utilizzando le matrici C_1 , C_2 , D e B introdotte sopra, come per lo schema PR-R2 si ottiene

$$\begin{aligned}
& M \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [C_1(u_N^{n+1} + u_N^n) + C_2(u_N^{n+1} + u_N^n)] = \\
& = f^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4} C_1 M^{-1} C_2 \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} \right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Quindi anche lo schema PR-DN è uno schema accurato al secondo ordine in Δt . \square

Infine si ha lo schema

Schema PR - approccio D

per $n = 0, \dots, T/\Delta t - 1$ determinare $u_N^{n+1} \in V_N$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1/2} - u_N^n, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{1N}(u_N^{n+1/2}, v_N) = \\
= (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} - \tilde{a}_{2N}(u_N^n, v_N) + (h_e^{n+1/2}, v_N)_{N,\partial\Omega_N} \\
u_N^{n+1/2} = g(t_{n+1/2}) \quad \text{su } \partial\Omega_D \\
\frac{2}{\Delta t} (u_N^{n+1} - u_N^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + \tilde{a}_{2N}(u_N^{n+1}, v_N) + (u_N^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} = \\
= (f^{n+1/2}, v_N)_{N,\Omega} + (g^{n+1}, v_N)_{N,\partial\Omega_{in}} - \tilde{a}_{1N}(u_N^{n+1/2}, v_N) + \\
+ \left(\nu \frac{\partial u_N^{n+1/2}}{\partial n}, v_N \right)_{N,\partial\Omega}.
\end{array} \right. \tag{3.77}$$

Teorema 3.6 Lo schema PR-D (3.77) è consistente ed è accurato al secondo ordine in Δt .

Dimostrazione. Procedendo come per lo schema PR-DN, si ottiene ancora

$$\begin{aligned}
& M \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [C_1(u_N^{n+1} + u_N^n) + C_2(u_N^{n+1} + u_N^n)] = \\
& = f^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4} C_1 M^{-1} C_2 \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} \right)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

e quindi, un'accuratezza del secondo ordine in Δt . \square

I quattro approcci esposti possono essere applicati anche al θ -method ed allo schema DR. Si osserva che, essendo lo schema DR e il θ -method, con $\theta \neq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, del primo ordine in Δt , gli schemi sopra presentati per l'imposizione delle condizioni al bordo risulteranno equivalenti dal punto di vista dell'accuratezza. La preferenza di uno schema su un altro potrà essere dettata dalle caratteristiche di stabilità degli approcci stessi.

Riguardo alla stabilità degli schemi sopra proposti si osserva che il teorema 3.1 non può in genere essere applicato in quanto le matrici associate allo splitting effettuato sul problema di diffusione trasporto non hanno un sistema comune di autovettori. Inoltre, sebbene la condizione di coercività sia soddisfatta, il termine $\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + b_0$, che determina la positività dell'operatore L_2 può essere negativo, negando l'ipotesi di semidefinita positività dei sottooperatori necessaria al teorema 3.1.

Lo studio della stabilità di tali schemi risulta alquanto ostico per problemi con condizioni al bordo non di tipo Dirichlet omogeneo. Dalle prove numeriche effettuate si è osservato che non si ha più assoluta stabilità per gli schemi suddetti. Si ottiene una stabilità condizionata, ovvero $\Delta t \leq F(N, \nu, \mathbf{b})$, dipendente non solo dal grado di interpolazione spettrale considerato, ma anche dalla viscosità, dal termine di trasporto e da tutti i dati del problema.

Può essere tuttavia evidenziato un confronto fra quattro approcci proposti sullo schema PR. In figura (3.1) e nelle successive è mostrato il raggio spettrale (ovvero $\rho(T) = \max_i |\lambda_i(T)|$) relativo alla matrice di iterazione dello schema PR, in funzione del Δt ed al variare degli approcci R1, R2, DN e D. Si osserva che la regione di stabilità associata allo schema DN, ovvero $I = \{\Delta t > 0 : \rho_{\Delta t}(T) < 1\}$ è sempre più estesa della regione di stabilità associata agli altri approcci. Ciò può essere giustificato dal fatto che nel passo ellittico dell'approccio DN non sussiste legame tra la parte ellittica e la parte iperbolica dell'operatore, ovvero l'operatore di diffusione trasporto risulta completamente disaccoppiato.

3.3.5 Risultati numerici

Nelle tabelle (3.1), (3.2) e (3.3) sono mostrati i risultati comprovanti l'accuratezza degli schemi proposti.

Δt	e^n			
	DN	R2	R1	D
.001	.2580e-6	.2554e-6	.1932e-3	.2752e-6
.00316	.2504e-5	.2478e-5	.6191e-3	.2506e-5
.005	.6315e-5	.6254e-5	.9906e-3	.6393e-5
.01	.2813e-4	.2794e-4	.2042e-2	.2948e-4
.03162	.4480e-3	.4472e-3	.7160e-2	.4825e-3
.05	.1359e-2	.1358e-2	.1206e-1	.1450e-2
.1	.6870e-2	.6865e-2	.2759e-1	.7121e-1

Tabella 3.1: Accuratezza dello schema PR per i vari approcci di imposizione delle condizioni al bordo.

Δt	e^n			
	DN	R2	R1	D
.001	.5163e-3	.5266e-3	.6406e-3	.5162e-3
.00316	.1768e-2	.1789e-2	.2235e-2	.1839e-2
.005	.3165e-2	.3186e-2	.3927e-2	.3385e-2
.01	.8481e-2	.8486e-2	.9962e-2	.9261e-2
.03162	.4353e-1	.4344e-1	.4756e-1	.4629e-1
.05	.7849e-1	.7832e-1	.8432e-1	.8214e-1
.1	.1739e+0	.1736e+0	.1830e+0	.1783e+0

Tabella 3.2: Accuratezza dello schema DR per i vari approcci di imposizione delle condizioni al bordo.

Poniamo

$$e^n := \frac{\|u_N^n - u(t_n)\|_{H^1(\Omega)}}{\|u(t_n)\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.79)$$

e consideriamo il problema parabolico di diffusione trasporto (3.2) o (3.49) definito sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$ con $\nu = 1.$, $\mathbf{b} = (\frac{y-x}{2}, xy)^T$, $b_0 = 0$, $\partial\Omega_D = \{(0, y), y \in [0, 1]\} \cup \{(1, y), y \in [0, 1]\}$, la cui soluzione esatta è $u(x, y, t) = e^{x+y+t}$. Quindi si $N = 8$ il grado di interpolazione spettrale.

Ricordando che il θ -metodo è accurato al second'ordine per $\theta^* = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, in

Δt	e^n			
	DN	R2	R1	D
.001	.2017e-6	.2031e-6	.1126e-3	.2017e-6
.00316	.1903e-5	.1915e-5	.3563e-3	.1902e-5
.005	.4553e-5	.4582e-5	.5634e-3	.4548e-5
.01	.1642e-4	.1654e-4	.1228e-2	.1691e-4
.03162	.1225e-3	.1242e-3	.3581e-2	.1217e-3
.05	.2608e-3	.2659e-3	.5676e-2	.2588e-3
.1	.7761e-3	.8013e-3	.1143e-1	.7713e-3

Tabella 3.3: Accuratezza del θ -metodo per i vari approcci di imposizione delle condizioni al bordo con $\theta = \theta^*$.

tabella (3.3) è mostrato l'errore in norma H^1 per tale valore di θ .

Di seguito vengono riportati alcuni grafici che mostrano, per alcune scelte della viscosità e del campo \mathbf{b} ed al variare di N e Δt , il raggio spettrale ρ della matrice di iterazione T_{PR} nei vari approcci. Si osserva che le matrici di iterazione associate all'approccio R1 ed DN coincidono, essendo i due schemi differenti solo per l'imposizione delle condizioni al bordo.

Osservazione 3.2 Applicazione a problemi stazionari Gli schemi fractional step possono essere utilizzati anche per la risoluzione di problemi stazionari. In tal caso essi vengono visti come metodo iterativi per convergere alla soluzione del problema assegnato. La stabilità dello schema (3.17) è assicurata qualora gli autovalori dell'operatore T siano strettamente minori di 1.

In figura (3.8) mostriamo la soluzione numerica di un problema stazionario a convezione dominante e con uno strato limite al bordo. La soluzione non presenta oscillazioni e lo strato limite è catturato nel minimo intervallo ammissibile dalla griglia di nodi. \square

I dati del problema sono: $\Omega = (0, 1)^2$, $\nu = 10^{-5}$, $\mathbf{b} = (-1, -1)^T$, $b_0 = 0$, $f = 0$ e $g = 0$ su $\partial\Omega_D$.

Il problema è stato risolto con lo schema PR, con $\Delta t = .1$ e $N = 24$.

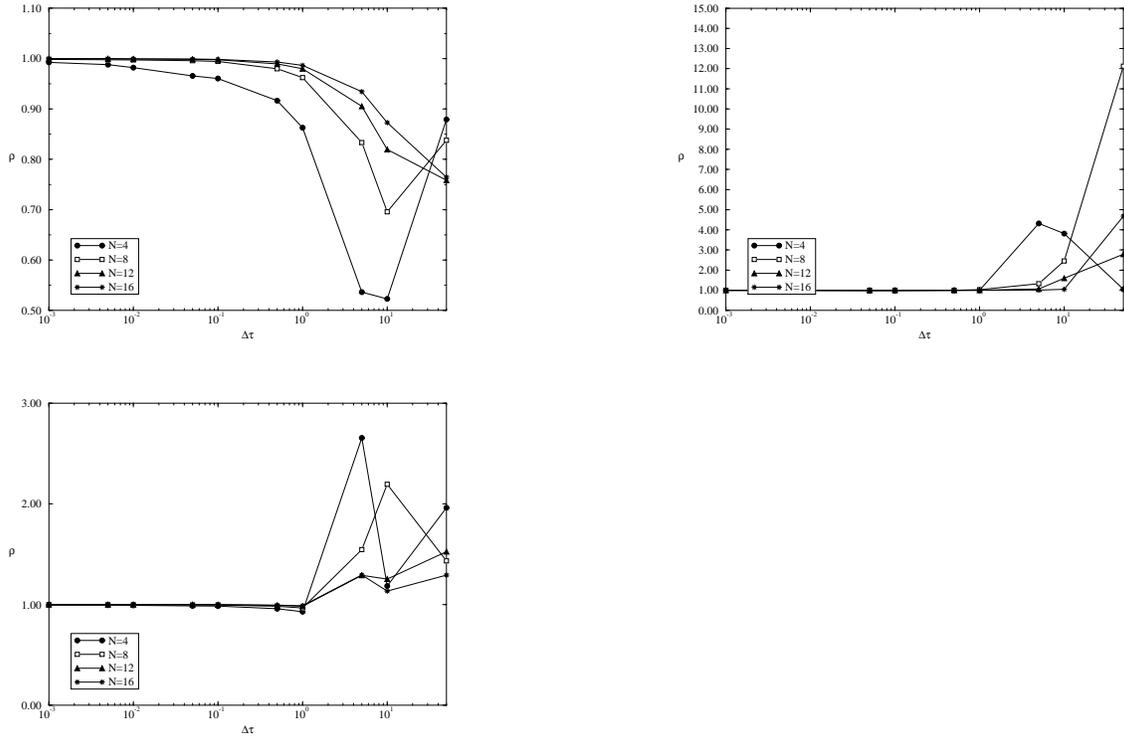


Figura 3.1: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = .01$, $\mathbf{b} = (-x - 1, -y - 1)^T$, $b_0 = 0$.

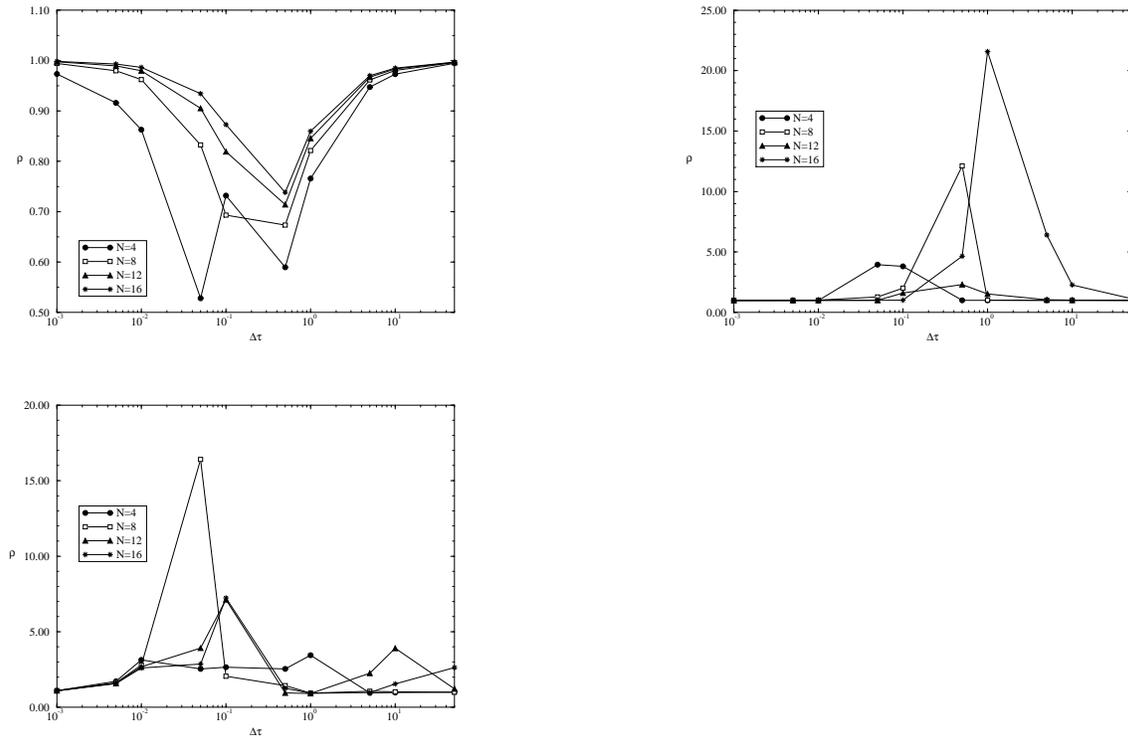


Figura 3.2: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = 1.$, $\mathbf{b} = (-100(x+1), -100(y+1))^T$, $b_0 = 0$.

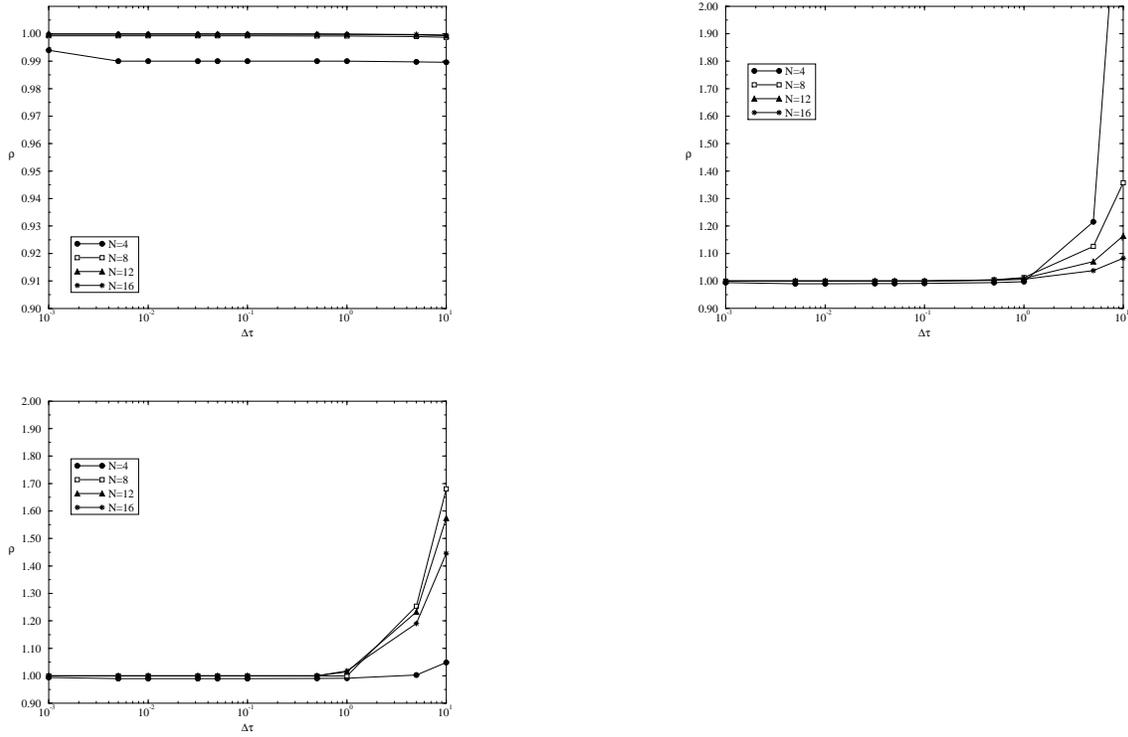


Figura 3.3: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = 1.e - 4$, $\mathbf{b} = (-(x + y)/2, xy)^T$, $b_0 = 0$.

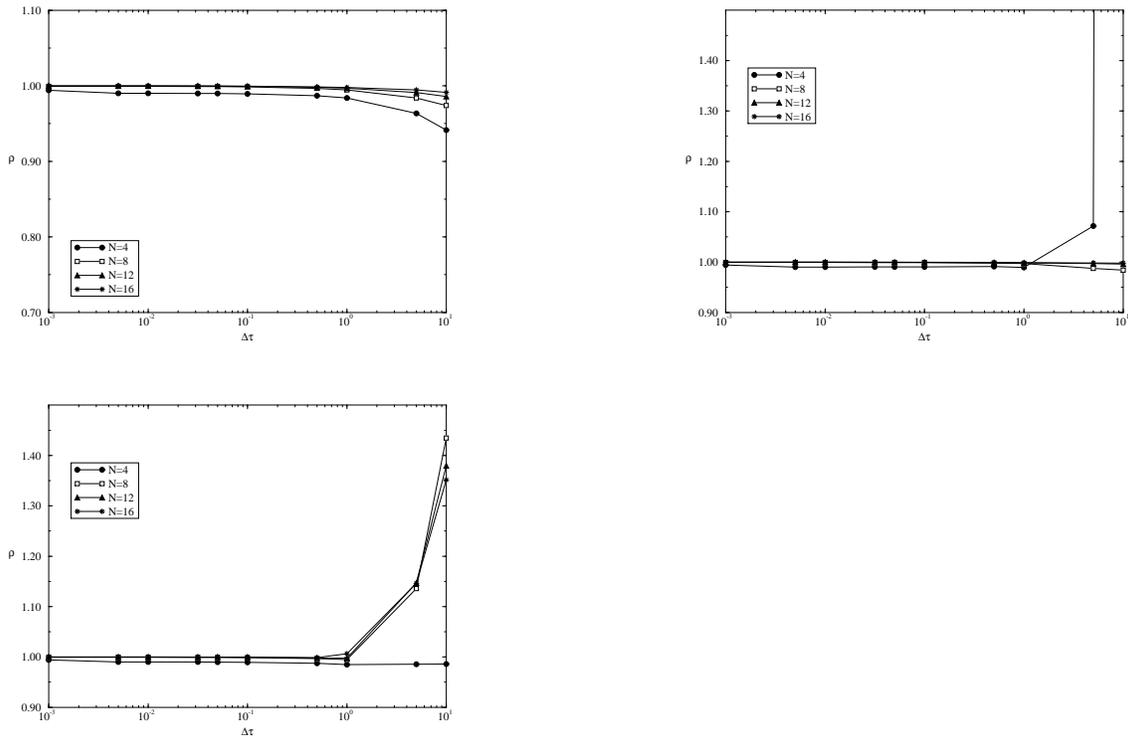


Figura 3.4: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = 1.e - 2$, $\mathbf{b} = (-(x + y)/2, xy)^T$, $b_0 = 0$.

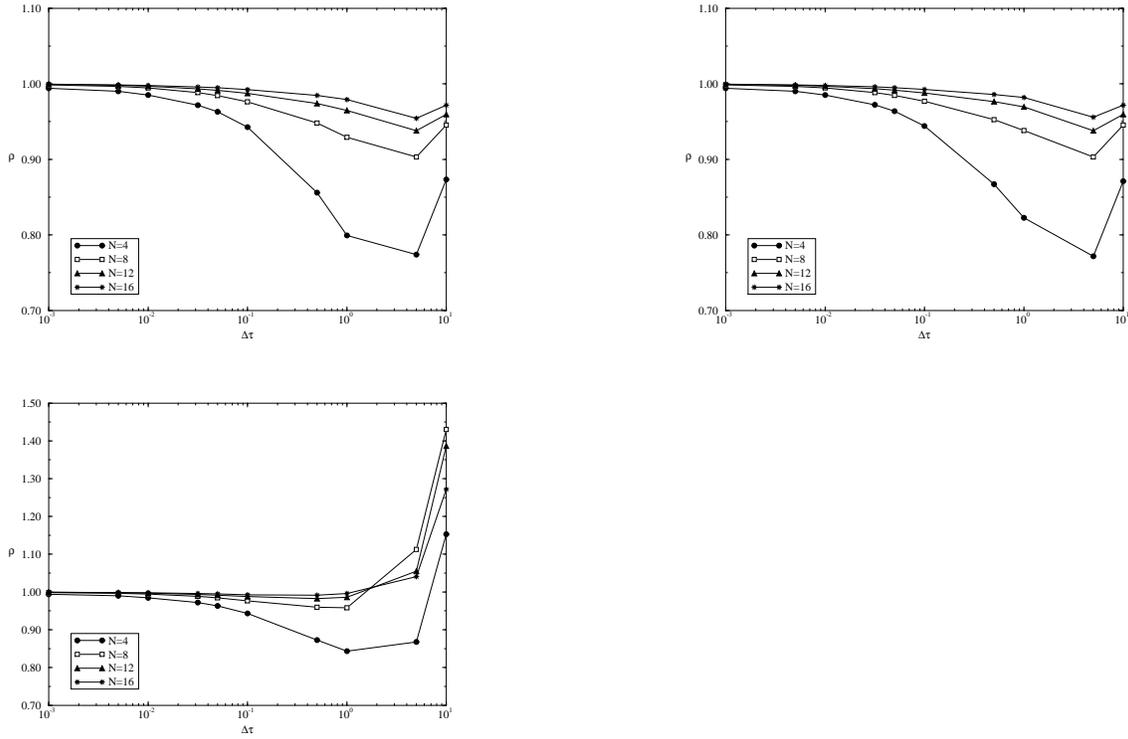


Figura 3.5: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = 1.$, $\mathbf{b} = (-(x + y)/2, xy)^T$, $b_0 = 0$.

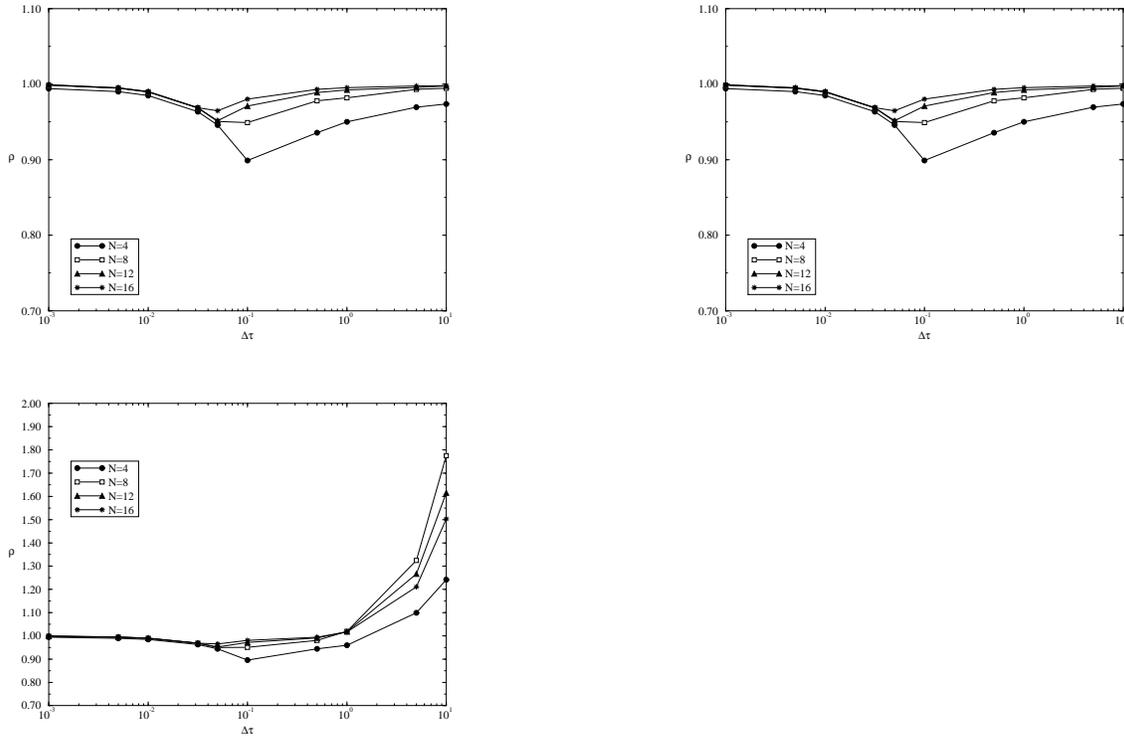


Figura 3.6: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN e R1 (alto sinistra), R2 (alto destra) e D (basso). $\nu = 100$, $\mathbf{b} = (-(x + y)/2, xy)^T$, $b_0 = 0$.

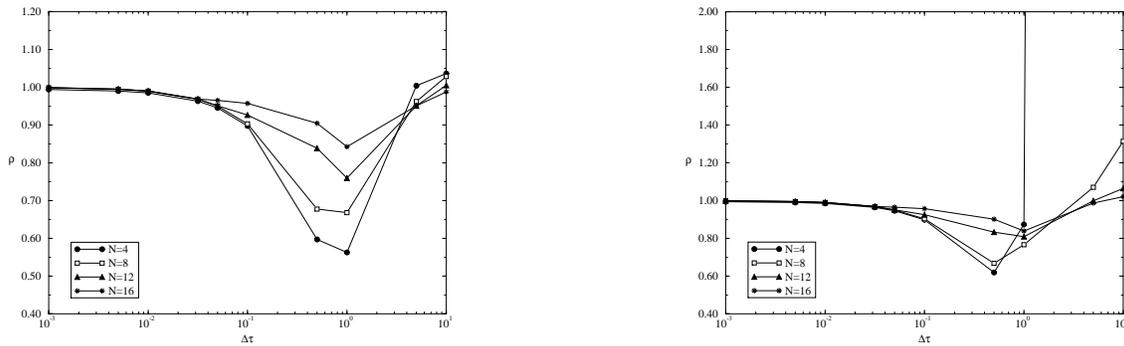


Figura 3.7: Raggio spettrale della matrice di iterazione T_{PR} per gli approcci DN, R1 e R2 (alto sinistra), e D (alto destra). $\nu = 1.$, $\mathbf{b} = (\cos(\pi x), \sin(\pi y))^T$, $b_0 = 0$. Essendo $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ sul bordo $\partial\Omega$ gli schemi R2, R1 e DN coincidono.

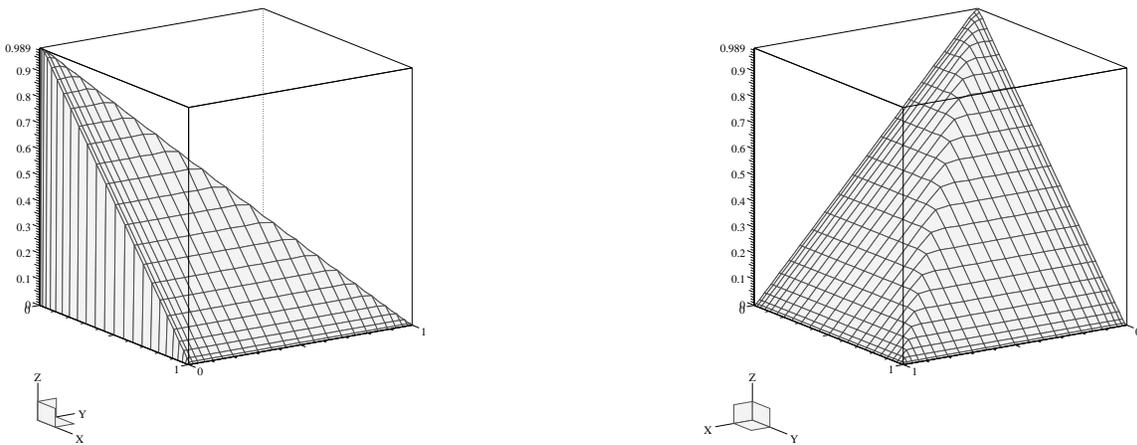


Figura 3.8: La soluzione del problema stazionario di diffusione trasporto con $\nu = 1.d - 5$, $\mathbf{b} = (1,1)$, $f = 1$ e $u = 0$ al bordo. Schema di risoluzione Peaceman-Rachford, $N = 24$.

Parte II

Metodi di decomposizione di domini

Capitolo 4

Metodi iterativi fra sottodomini per problemi ellittici

Come si è potuto rilevare dal precedente capitolo, i metodi spettrali possono essere utilizzati per l'approssimazione di problemi differenziali ai limiti su geometrie semplici, quali quadrati o domini riconducibili a quadrati mediante trasformazioni affini. Per poter affrontare problemi di interesse pratico su geometrie complesse è opportuno affiancare ai metodi spettrali (altamente accurati) le tecniche di decomposizione di domini.

In tal modo, il dominio computazionale di forma varia può essere decomposto in più sottodomini così che risolvere il problema originario equivale a risolvere tanti problemi differenziali, uno per sottodominio, simili all'originale con il vincolo che la soluzione numerica e la sua derivata siano globalmente continue. Sui vari domini di forma quadrangolare i problemi differenziali possono essere approssimati mediante i Metodi Spettrali.

In questo capitolo è data una formulazione multidomini del problema ellittico autoaggiunto in termini dell'operatore di Stéklov-Poincaré. Di seguito è presentato lo schema di proiezione "Projection Decomposition Method" (PDM) proposto da Agoshkov e Ovtchinnikov [3], [51] ed esteso in [31] ai metodi spettrali.

4.1 Formulazione matematica ed approssimazione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio aperto e limitato con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1 a tratti, siano Ω_k (per $k = 1, \dots, M$) M sottodomini di Ω trasformabili mediante una mappa invertibile (1.36) nel quadrato di riferimento $(-1, 1)^2$, t.c.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^M \overline{\Omega}_k. \quad (4.1)$$

Inoltre si chiede che la decomposizione (4.1) sia geometricamente conforme, cioè : per ogni coppia di sottodomini Ω_i e Ω_j , con $i \neq j$ per cui succede che $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j \neq \emptyset$, si chiede che $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ sia costituito o da un punto (vertice comune ai due domini), o da un intero lato degli stessi.

Si definiscono:

$$\Omega_0 = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (4.3)$$

$$\Gamma = \overline{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \partial\Omega). \quad (4.4)$$

e l'insieme Γ viene detto *interfaccia*.

Il problema ai limiti ellittico (1.14)-(1.18) può essere riformulato sulla decomposizione di Ω sopra definita. Per comodità di esposizione si supponga che $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_D$ e che $g \equiv 0$.

Seguendo un approccio classico al problema (si vedano [2] e [56]), la soluzione u di (1.14) può essere espressa come la somma di due funzioni:

$$u = u_0 + v, \quad (4.5)$$

dove u_0 è la soluzione del seguente problema differenziale:

$$\text{trovare } u_0 \in H_0^1(\Omega_0) : \quad a(u_0, w) = \mathcal{F}(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_0) \quad (4.6)$$

mentre v è la soluzione del problema:

$$\text{trovare } v \in H_0^1(\Omega) : \quad a(v, w) = \mathcal{F}(w) - a(u_0, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (4.7)$$

Ricordando la definizione di Ω_0 si nota che risolvere il problema (4.6) vuol dire risolvere M problemi simili al problema (1.14) con condizioni al bordo di Dirchlet.

Il problema (4.7) può essere invece ricondotto ad un problema sull'interfaccia come ci si appresta a descrivere ora.

Sia H_{harm} il seguente spazio

$$H_{harm} = \{v \in H_0^1(\Omega) : a(v, w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_0)\} \quad (4.8)$$

e denominiamo “armonica” ogni funzione dello spazio H_{harm} anche se il coefficiente di assorbimento b_0 dato in (1.18) non è nullo. È semplice vedere che ogni funzione $w \in H_0^1(\Omega)$ può essere scritta univocamente come $w = w_0 + w_h$, con $w_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ e $w_h \in H_{harm}$ e, sostituendo alla funzione w l'espressione $w_0 + w_h$ in (4.7), si ha, per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(v, w_0) + a(v, w_h) = \mathcal{F}(w_0) + \mathcal{F}(w_h) - a(u_0, w_0) - a(u_0, w_h). \quad (4.9)$$

Poichè per definizione di H_{harm} si ha che $a(u_0, w_h) = 0$ e per il problema (4.6) è vero che $a(u_0, w_0) = \mathcal{F}(w_0)$ e che $a(v, w_0) = \mathcal{F}(w_0)$, si ottiene che v è una funzione di H_{harm} e che il problema (4.7) può essere riscritto come segue:

$$\text{trovare } v \in H_{harm} : \quad a(v, w) = \mathcal{F}(w) \quad \forall w \in H_{harm}. \quad (4.10)$$

A questo punto si osserva che, per noti risultati sulla teoria delle tracce (si vedano [29], [43], [65]), lo spazio H_{harm} è isomorfo allo spazio

$$H_0^{1/2}(\Gamma) = \{\varphi = w|_\Gamma : w \in H_0^1(\Omega)\} \quad (4.11)$$

munito della norma:

$$\|\varphi\|_{H_0^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.12)$$

e quindi il problema (4.10) può essere così riscritto:

$$\text{trovare } \varphi \in H_0^{1/2}(\Gamma) : \quad a(\tilde{E}_\Gamma \varphi, \tilde{E}_\Gamma \psi) = \mathcal{F}(\tilde{E}_\Gamma \psi) \quad \forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma). \quad (4.13)$$

Con \tilde{E}_Γ abbiamo inteso l'operatore di estensione “armonica” $\tilde{E}_\Gamma : H_0^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{harm}$: $\tilde{E}_\Gamma(\varphi) = w \in H_{harm}$.

Indicando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra $(H_0^{1/2}(\Gamma))'$ e $H_0^{1/2}(\Gamma)$, si definisce *operatore di Steklov-Poincarè* l'operatore $\mathcal{S} : H_0^{1/2}(\Gamma) \rightarrow (H_0^{1/2}(\Gamma))'$:

$$\langle \mathcal{S}\varphi, \psi \rangle = a(\tilde{E}_\Gamma \varphi, \tilde{E}_\Gamma \psi) \quad \forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma). \quad (4.14)$$

Ponendo

$$\langle \chi, \psi \rangle = \mathcal{F}(\tilde{E}_\Gamma \psi) \quad \forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma), \quad (4.15)$$

dove $\chi = \chi(f, h) \in (H_0^{1/2}(\Gamma))'$, il problema (4.13) diventa:

$$\text{trovare } \varphi \in H_0^{1/2}(\Gamma) : \quad \langle \mathcal{S}\varphi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle \quad \forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma). \quad (4.16)$$

Si osserva che il problema (4.16) è un problema pseudo-differenziale definito sull'interfaccia Γ della decomposizione assegnata, la cui soluzione φ non è altro che la traccia su Γ della soluzione v del problema (4.7), ovvero la traccia sull'interfaccia Γ della soluzione u del problema (1.14).

Quindi, una volta che il problema (4.16) è stato risolto, la soluzione u del problema (1.14)-(1.18) è ottenuta dalla risoluzione del problema

$$\begin{aligned} \text{trovare } u \in H^1(\Omega_0), \text{ con } (u - \tilde{E}_\Gamma \varphi) \in H_0^1(\Omega_0) : \\ a(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Per definizione di H_{harm} e per la formula di Green ([57]) si osserva che per $\varphi \in H_0^{1/2}(\Gamma)$ e $\forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma)$ si ha:

$$\langle \mathcal{S}\varphi, \psi \rangle = \sum_{k=1}^M a_k((\tilde{E}_\Gamma \varphi)|_{\Omega_k}, (\tilde{E}_\Gamma \psi)|_{\Omega_k}) = \sum_{k=1}^M \left\langle \nu \frac{\partial(\tilde{E}_\Gamma \varphi)|_{\Omega_k}}{\partial n_k}, \psi \right\rangle, \quad (4.18)$$

dove a_k è la restrizione ad Ω_k della forma bilineare a , n_k è la normale con verso uscente a $\partial\Omega_k$, e $v|_{\Omega_k} = (\tilde{E}_\Gamma \varphi)|_{\Omega_k}$ rappresenta la restrizione al dominio Ω_k dell'estensione "armonica" di φ . Inoltre

$$\langle \chi, \psi \rangle = - \sum_{k=1}^M \left\langle \nu \frac{\partial u_0|_{\Omega_k}}{\partial n_k}, \psi \right\rangle \quad \forall \psi \in H_0^{1/2}(\Gamma). \quad (4.19)$$

Osservazione 4.1 Alla luce delle equivalenze (4.18) e (4.19) il problema (4.16) esprime la continuità della derivata conormale della soluzione u attraverso l'interfaccia Γ .

Osservazione 4.2 L'operatore \mathcal{S} è un operatore simmetrico, definito positivo e illimitato. Ne segue, che la sua controparte discreta, ottenuta con un metodo numerico

consistente, è un matrice simmetrica e definita positiva, ma nello stesso tempo ha un numero di condizionamento illimitato, ovvero è mal condizionata. Risolvere quindi in maniera efficiente la controparte discreta del problema (4.16) è il problema cruciale delle tecniche di decomposizione di domini. Infatti, una volta che il problema (4.16) è stato risolto, risolvere il problema (4.17) vuol dire risolvere M problemi ellittici con condizioni al bordo Dirichlet.

In letteratura sono noti diversi approcci per la risoluzione del problema (4.16). Alcuni schemi consistono nel preconditionare opportunamente la matrice \mathcal{S}_n ottenuta dalla discretizzazione dell'operatore \mathcal{S} in modo da rendere limitato il condizionamento della matrice stessa. Quindi, risolvendo il sistema lineare, discretizzazione dell'equazione (4.16), mediante un metodo iterativo preconditionato, ci si riduce a risolvere successivamente problemi differenziali simili all'originale e definiti sui sottodomini della decomposizione, legati all'interfaccia da opportune condizioni di continuità. Lo schema "Dirichlet/Neumann" ([48], [54], [55]) e lo schema "Neumann/Neumann" ([6]) sono due schemi basati su questo approccio. \square

4.2 Lo schema Projection Decomposition Method

L'idea di base del metodo di proiezione (PDM) ([3],[51]) è quella di introdurre nello spazio $H_0^{1/2}(\Gamma)$ una base "ben condizionata" (nel senso di Mikhlin) di polinomi algebrici al fine di ottenere la limitatezza del numero di condizionamento della matrice approssimante l'operatore di Steklov-Poincaré. Una volta introdotta questa base, l'equazione sull'interfaccia può essere risolta senza l'uso di preconditionatori e con un metodo iterativo (quale ad esempio il Gradiente Coniugato) la cui velocità di convergenza non dipende dal numero di funzioni di base scelte all'interno dello spazio.

Inoltre, qualora si usino metodi altamente accurati (quali ad esempio i metodi spettrali) per risolvere i problemi differenziali all'interno dei sottodomini, il metodo di proiezione mostra accuratezza spettrale.

Si riprenda il problema (4.13) e si introduca in $H_0^{1/2}(\Gamma)$ una base di polinomi $\Phi^n = \{\varphi_i^n\}_{i=1}^{\nu_n}$. Il parametro n rappresenta il numero di funzioni corrispondenti al tratto $\bar{\Gamma}_{ij}$ dell'interfaccia Γ , mentre ν_n rappresenta il numero totale delle funzioni di base in $H_0^{1/2}(\Gamma)$.

Sia H_n lo spazio generato da funzioni che sono l'estensione "armonica" ad Ω delle funzioni della base Φ^n , cioè : $H^n = \text{span}\{\tilde{E}_\Gamma \Phi^n\}$ e si definiscano *funzioni di base armoniche* le funzioni $\omega_i^n = \tilde{E}_\Gamma \varphi_i^n$ per $i = 1, \dots, \nu_n$. Per costruzione H^n è un sottospazio di dimensione finita dello spazio H_{harm} ed il problema (4.10) può essere

riscritto secondo la formulazione Galerkin come:

$$\text{trovare } v^n \in H^n : \quad a(v^n, w) = \mathcal{F}(w) \quad \forall w \in H^n. \quad (4.20)$$

Rappresentando la funzione v^n come combinazione lineare delle funzioni di base “armoniche” ω_i^n si ha:

$$v^n = \sum_{j=1}^{\nu_n} v_j^n \omega_j^n \quad (4.21)$$

il problema (4.20) può essere rappresentato nella forma matriciale:

$$\mathcal{S}_n \mathbf{v}_n = \mathbf{b}_n \quad (4.22)$$

dove

$$\mathcal{S}_n = [a(\omega_j^n, \omega_i^n)]_{ij=1}^{\nu_n}, \quad \mathbf{v}_n = [v_j^n]_{j=1}^{\nu_n}, \quad \mathbf{b}_n = [b_i^n]_{i=1}^{\nu_n} = [\mathcal{F}(\omega_i^n)]_{i=1}^{\nu_n}. \quad (4.23)$$

Come si è accennato sopra la risoluzione del sistema lineare (4.22) è affrontata mediante il metodo del gradiente coniugato (la matrice \mathcal{S}_n è simmetrica e definita positiva per costruzione). In realtà la matrice \mathcal{S}_n non è mai costruita esplicitamente, ma, per il calcolo del residuo all’interno del Gradiente Coniugato, si fa riferimento al suo significato differenziale.

Si osserva infatti che calcolare il residuo nel corso del Gradiente Coniugato vuol dire svolgere un’operazione di prodotto matrice per vettore. Se p^n è una funzione in H^n e p_i^n sono i suoi coefficienti rispetto alla base ω_i^n , poniamo $\mathbf{p}^n = [p_i^n]_{i=1}^{\nu_n}$. Si osserva che i valori p_i^n sono anche i coefficienti dell’espansione rispetto alla base φ_i^n . Allora, dato il vettore $\mathbf{p}^n \in \mathbb{R}^{\nu_n}$ si deve calcolare il vettore $\mathbf{q}^n = [q_i^n]_{i=1}^{\nu_n} \in \mathbb{R}^{\nu_n}$ tale che $\mathbf{q}^n = \mathcal{S}_n \mathbf{p}^n$.

Per definizione di \mathcal{S}_n questo vuol dire calcolare i valori $q_i^n = a(p^n, \omega_i^n)$ e, in base alla relazione (4.18), ciò vuol dire calcolare l’estensione “armonica” ad Ω del polinomio p^n per poi calcolarne la derivata normale sull’interfaccia Γ , ovvero:

$$q_i^n = \sum_{k=1}^M \int_{\partial\Omega_k \cap \Gamma} \nu \frac{\partial p^n}{\partial n_k} \varphi_i^n \, d\Omega \quad \forall i = 1, \dots, \nu_n. \quad (4.24)$$

Per quanto riguarda la costruzione del termine noto del sistema (4.22) si tiene presente la relazione (4.19), da cui si deduce:

$$b_i^n = - \sum_{k=1}^M \int_{\partial\Omega_k \cap \Gamma} \nu \frac{\partial u_0}{\partial n_k} \varphi_i^n \, d\Omega \quad \forall i = 1, \dots, \nu_n, \quad (4.25)$$

essendo u_0 la soluzione del problema (4.6).

Dalle formule (4.24) e (4.25) si deduce che per il calcolo del residuo all'interno del Gradiente Coniugato non è necessaria la conoscenza esplicita delle funzioni di base "armoniche". Lo schema PDM può essere riassunto come segue:

Algoritmo 4.1 Passo 0 Costruzione delle funzioni di base $\Phi^n = \{\varphi_i^n\}$

Passo 1 Risoluzione del problema (4.6), ovvero risoluzione, mediante un opportuno metodo di approssimazione, di M problemi ellittici con condizioni al bordo di tipo Dirichlet

Passo 2 Risoluzione del problema (4.7), ovvero risoluzione mediante il metodo del Gradiente Coniugato, del sistema lineare (4.22). Ad ogni passo deve essere calcolato un vettore q^n , ovvero devono essere risolti M problemi di rilevamento armonico di una funzione nota sull'interfaccia e deve essere poi calcolata la derivata di queste funzioni sull'interfaccia stessa.

Passo 3 Somma della soluzione del **Passo 1** con la soluzione del **Passo 2**.

Attraverso il seguente teorema si afferisce la convergenza e l'efficienza dello schema PDM.

Teorema 4.1 Sia $\Phi^n = \{\varphi_i^n\}$ una base di polinomi algebrici di grado minore o uguale a n su ogni tratto Γ_{ij} di Γ . Sia u_0 la soluzione del problema continuo (4.6) e sia v^n la soluzione del problema di Galerkin (4.20) con $n \geq 1$.

Allora la successione $\{u^n = u_0 + v^n, n \geq 1\}$ converge alla soluzione u del problema (1.14)-(1.18) e, supposto che $u \in H^s(\Omega)$ con $s \geq 2$, si ha che:

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq Cn^{1-s}\|u\|_{H^s(\Omega)}. \quad (4.26)$$

Inoltre, se Φ^n è una base ben condizionata nel senso di Mikhlin in $H_0^{1/2}(\Gamma)$, cioè esistono due costanti C_1 e C_2 indipendenti da n tali che, per ogni vettore $b^n \in \mathbb{R}^{\nu_n}$ si abbia:

$$C_1 \sum_{i=1}^{\nu_n} b_i^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu_n} b_i \varphi_i^n \right\|_{H_0^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_2 \sum_{i=1}^{\nu_n} b_i^2, \quad (4.27)$$

allora il numero di condizionamento della matrice \mathcal{S}_n è limitato da una costante.

Dimostrazione.

Per l'approssimazione di Galerkin del problema (4.10) si ha:

$$a(v - v^n, w) = 0 \quad \forall w \in H_n \quad (4.28)$$

con $v \in H_{harm}$ e $v^n \in H_n$, ovvero

$$a(v - v^n, v - v^n) = \min_{w \in H_n} a(v - w, v - w). \quad (4.29)$$

Ponendo $e_n = \min_{w \in H_n} \|v - w\|_{H^1(\Omega)}$, e sfruttando le costanti ν_0 e a_0 di coercività e di continuità associate alla forma bilineare a , si ottiene:

$$\|v - v^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \min_{w \in H_n} \|v - w\|_{H^1(\Omega)}^2 = e_n^2 \quad (4.30)$$

e

$$a_0 \|v - v^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(v - v^n, v - v^n) = \min_{w \in H_n} a(v - w, v - w) \leq \quad (4.31)$$

$$\leq a^0 \min_{w \in H_n} \|v - w\|_{H^1(\Omega)}^2 = a^0 e_n^2. \quad (4.32)$$

Dalle due uguaglianze precedenti si ottiene che

$$e_n \leq \|v - v^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{a^0}{a_0}\right)^{1/2} e_n \quad (4.33)$$

da cui, se $e_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la convergenza della soluzione di Galerkin v^n alla soluzione v del problema continuo (4.7).

Dalla definizione dello spazio H_{harm} si ottiene che:

$$\forall h \in H_{harm}, \quad a(h, h) \leq a(z, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega) : z|_{\Gamma} = h|_{\Gamma}. \quad (4.34)$$

Utilizzando questa proprietà, la continuità e la coercività della forma bilineare a , si ha, per ogni $h_n \in H_n$:

$$\|v - h_n\|_1^2 \leq a_0^{-1} a(v - h_n, v - h_n) \leq a_0^{-1} a(z, z) \leq a_0^{-1} a^0 \|z\|_1^2 \\ \forall z \in H_0^1(\Omega) : z|_{\Gamma} = (v - h_n)|_{\Gamma}$$

poichè $v - h_n \in H_{harm}$. Si ricorda che v è tale che $v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}$.

Consideriamo $z = u - I_n u$, $h_n \in H_n : h_n|_{\Gamma} = (I_n u)|_{\Gamma}$, dove in ogni Ω_k $I_n u$ è un polinomio algebrico di grado $\leq n$ rispetto ad ogni variabile x e y che interpola u negli $(n+1)^2$ nodi LGL in Ω_k . (Si ricorda che in questo capitolo si considera una decomposizione conforme in domini rettangolari).

Utilizzando le stime di interpolazione in spazi di Sobolev (see, e.g., [11] cap. 9, and [5]) e per la proprietà di miglior approssimazione del metodo di Galerkin (4.29) si ottiene la stima (4.26).

Infine, la stima per il condizionamento del sistema (4.22) segue dalla continuità della forma bilineare a e da (4.27). \square

4.2.1 Costruzione di una base ben-condizionata

In questo paragrafo è presentato l'algoritmo per la costruzione di una base polinomiale a pezzi ben condizionata per il metodo PDM proposto da Ovtchinnikov ([51]). Per semplicità consideriamo il dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ partizionato in quattro sottodomini quadrati, mentre per il caso più generale rimandiamo a [51].

Consideriamo le due successioni di funzioni $\{\psi_k^0(x)\}$ e $\{\varphi_k^0(x)\}$ definite come:

$$\begin{aligned}\psi_k^0(x) &= x(x - \frac{1}{k})(x - \frac{2}{k}) \cdots (x - 1), \\ \varphi_{2k-1}^0(x) &= \begin{cases} \psi_k^0(x), & x > 0 \\ -\psi_k^0(-x), & x < 0 \end{cases} \\ \varphi_{2k}^0(x) &= \begin{cases} \frac{\psi_k^0(x)}{x}, & x > 0 \\ \varphi_{2k}^0(-x), & x < 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (4.35)$$

utilizzando le quali possiamo costruire le successioni di funzioni $\{u_k^0\}$ e $\{v_k^0\}$ seguenti:

$$\begin{aligned}u_k^0, v_k^0 &\in H_{harm}(D), \quad D = (0, 1) \times (0, 1) : \\ u_k^0(x, 0) &= \psi_k^0(x), \quad u_k^0(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1; \\ u_k^0(0, y) &= 0, \quad u_k^0(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1; \\ v_k^0(x, 0) &= \varphi_k^0(x), \quad v_k^0(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1; \\ v_k^0(0, y) &= \varphi_k^0(-y), \quad v_k^0(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Per ciascuna di queste ultime successioni, utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, generiamo le successioni $\{u_i\}$ e $\{v_i\}$ ortogonali in $H_{harm}(D)$. Definiamo infine su $\Gamma = \{(x, 0) \in \Omega\} \cup \{(0, y) \in \Omega\}$ la seguente successione $\{\varphi_i^x, \varphi_i^y, \varphi_i^{xy}\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_i^x(x, y) &= \begin{cases} u_i(-x, 0), & -1 < x < 0, \quad y = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \varphi_i^y(x, y) &= \begin{cases} u_i(-y, 0), & x = 0, \quad -1 < y < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \varphi_i^{xy}(x, y) &= \begin{cases} v_i(x, 0), & 0 < x < 1, \quad y = 0 \\ v_i(0, y), & x = 0, \quad 0 < y < 1 \end{cases}\end{aligned}\quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_i^{xy}(-x, 0) &= v_i(x, 0), & 0 < x < 1 \\ \varphi_i^{xy}(0, -y) &= v_i(0, y), & 0 < y < 1\end{aligned}\tag{4.38}$$

o

$$\begin{aligned}\varphi_i^{xy}(-x, 0) &= \frac{1}{2}(v_i(x, 0) + v_i(0, x)), & 0 < x < 1 \\ \varphi_i^{xy}(0, -y) &= \frac{1}{2}(v_i(y, 0) + v_i(0, y)), & 0 < y < 1\end{aligned}\tag{4.39}$$

o anche

$$\begin{aligned}\varphi_i^{xy}(-x, 0) &= v_i(x, x), & 0 < x < 1 \\ \varphi_i^{xy}(0, -y) &= v_i(y, y), & 0 < y < 1\end{aligned}\tag{4.40}$$

In accordo con [51] la successione $\Phi^n = \{\varphi_i^x, \varphi_i^y, \varphi_i^{xy}\}_{i=1,n}$, dove le funzioni $\varphi_i^x, \varphi_i^y, \varphi_i^{xy}$ sono scelte fra quelle definite sopra, è ben condizionata in $H_0^{1/2}(\Gamma)$ ovvero, con questa scelta per la base Φ^n , lo schema PDM converge con una velocità che è indipendente dalle dimensioni del problema discreto. Inoltre, qualora si scelgano per le funzioni φ_i^{xy} le espressioni (4.38) o (4.39) questa base è polinomiale a pezzi e quindi, in accordo col Teorema 4.1, fornisce un'elevata accuratezza per l'approssimazione PDM. Ciò non accade nel caso (4.40) in cui su $\{(x, y) \in \Gamma : x < 0 \text{ o } y < 0\}$ vengono usate funzioni φ_i^{xy} di tipo non polinomiale. Per ripristinare l'alta accuratezza anche in quest'ultimo caso si può adottare un'interpolazione di tipo polinomiale per le $v_i(x, x)$. Per questo caso non è ancora stata provata da un punto di vista teorico che la base così ottenuta presenti proprietà di buon condizionamento analoghe a quelle ottenute nel caso precedente. Tuttavia, le prove numeriche che verranno presentate nel paragrafo 4.2.5 mostrano che il numero di condizionamento del sistema (4.22) ha una dipendenza molto debole dal numero di funzioni di base impiegate. Il motivo per il quale si è indotti a preferire le funzioni (4.40) ai polinomi (4.38) o (4.39) è che un tale prolungamento induce una dipendenza del numero di condizionamento dello schema PDM dal numero di sottodomini in maniera più debole che con la scelta (4.38) o (4.39).

4.2.2 PDM e l'approssimazione spettrale

Per l'approssimazione della soluzione u_0 definita in (4.6) e della funzione p^n presente nell'espressione (4.24) sono stati utilizzati i metodi spettrali nella formulazione Galerkin generalizzato esposta nel capitolo 1.

In particolare per $k = 1, \dots, M$ poniamo:

$$V_{N,k} = H_0^1(\Omega_k) \cap \mathbb{Q}_N(\Omega_k), \quad (4.41)$$

e come approssimazione della funzione u_0 si consideri la funzione $u_{0N} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ tale che le funzioni $u_{0Nk} = u_{0N}|_{\Omega_k} \in V_{N,k}$ siano le soluzioni dei problemi

$$a_{N,k}(u_{0Nk}, v_N) = (\nabla u_{0Nk}, \nabla v_N)_{N,\Omega_k} + (\kappa u_{0Nk}, v_N)_{N,\Omega_k} = (f, v_N)_{N,\Omega_k} \quad \forall v_N \in V_{N,k} \quad (4.42)$$

e dove $(\cdot, \cdot)_{N,\Omega_k}$ è il prodotto scalare discreto definito in (1.41).

Consideriamo ora il calcolo dei coefficienti q_i^n (4.24), essendo nota la restrizione a Γ della funzione $p^n \in H^n$ e sia $\lambda = p^n|_{\Gamma}$. La funzione p^n viene approssimata con la funzione $p_N^n \in H^n$ tale che, per ogni $k = 1, \dots, M$ le funzioni $p_{Nk}^n = p_N^n|_{\Omega_k} \in \mathbb{Q}_N(\Omega_k)$ sono le soluzioni dei problemi seguenti

$$a_{N,k}(p_{Nk}^n, v_N) = (p_{Nk}^n, \nabla v_N)_{N,\Omega_k} + (\kappa p_{Nk}^n, v_N)_{N,\Omega_k} = 0 \quad \forall v_N \in V_{N,k} \quad (4.43)$$

con la condizione che $p_{Nk}^n = \lambda$ nei nodi LGL appartenenti a $\partial\Omega_k \cap \Gamma$.

La soluzione p_N^n è detta soluzione “armonica” discreta.

A questo punto possiamo calcolare i coefficienti q_i^l in (4.25), cioè,

$$q_i^n = \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Omega_k \cap \Gamma} \varphi_i^n \frac{\partial p^n}{\partial n_k} d(\partial\Omega)_k, \quad (4.44)$$

dove le *funzioni di base di interfaccia* $\{\varphi_i^n\}$, definite su Γ , sono polinomi di grado n su ogni segmento di Γ (si ricordi il Teorema 4.1). Sostituiamo ad ogni integrale su $\partial\Omega_k$ che appare in (4.44) la controparte discreta $(\cdot, \cdot)_{N,\partial\Omega_k}$ introdotta in precedenza, ossia poniamo

$$q_i^n = \sum_{k=1}^m \left(\varphi_i^n, \frac{\partial p_N^n}{\partial n_k} \right)_{N,\partial\Omega_k}. \quad (4.45)$$

Il grado N , da noi scelto per l'approssimazione spettrale, coincide con il numero n delle funzioni polinomiali di base sull'interfaccia introdotte nel paragrafo 4.2.1. Per la formula di Green discreta (1.119), ricordando che $\nu = 1$, si ha

$$q_i^n = \sum_{k=1}^m a_{N,k}(p_N^n, w_i^n) \quad (4.46)$$

essendo $w_i^n = E_\Gamma \varphi_i^n$ le estensioni “armoniche” delle funzioni di interfaccia φ_i^n ad Ω . I termini (4.46) possono essere calcolati in modo efficiente se si dispone di una espressione esplicita delle w_i^n . Per ottenerla, consideriamo su ciascun sottodominio Ω_k l’insieme dei polinomi di Lagrange $\{\varphi_{ij}^k \in \mathbb{Q}_N(\Omega_k)$, per $i, j = 0, \dots, N\}$, in modo che le funzioni $w_i^n|_{\Omega_k}$ ammettano la seguente rappresentazione

$$w_i^n = \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \omega_{j_1 j_2}^{i,n} \varphi_{j_1 j_2}^k, \quad (4.47)$$

essendo $\omega_{j_1 j_2}^{i,n} = w_i^n(x_{j_1}^{(k)}, y_{j_2}^{(k)})$. Si ha:

$$q_i^n = \sum_{k=1}^m \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \omega_{j_1 j_2}^{i,n} a_{N,k}(p_N^n, \varphi_{j_1, j_2}^k), \quad (4.48)$$

ed essendo p_N^n una funzione “armonica” discreta in Ω_k , i coefficienti (4.48) diventano

$$q_i^n = \sum_{k=1}^m \sum_{j_1, j_2} \omega_{j_1 j_2}^{i,n} a_{N,k}(p_N^n, \varphi_{j_1, j_2}^k), \quad (4.49)$$

ovvero la sommatoria sugli indici j_1 e j_2 è ristretta ai soli nodi di $\partial\Omega_k$. Di conseguenza, per la formula di Green discreta otteniamo:

$$a_{N,k}(p_N^n, \varphi_{j_1, j_2}^k) = - \left(\frac{\partial p_N^n}{\partial n_k}, \varphi_{j_1, j_2}^k \right)_{N, \partial\Omega_k} + (-\Delta p_N^n + \kappa p_N^n, \varphi_{j_1, j_2}^k)_{N, \Omega_k}. \quad (4.50)$$

L’ultimo termine in questa relazione è nullo poichè $-\Delta p_N^n + \kappa p_N^n = 0$ su tutti i nodi interni a Ω_k , mentre le funzioni φ_{j_1, j_2}^k sono nulle in tutti i nodi di bordo. Inoltre il primo addendo del termine noto si annulla per tutti i nodi interni j_1, j_2 poichè lì $\varphi_{j_1, j_2}^k = 0$.

Procedendo nello stesso modo ed utilizzando l’integrale discreto su $\partial\Omega_k$ come in (4.45) i coefficienti b_i^n di (4.25) sono:

$$b_i^n = - \sum_{k=1}^m \left(\varphi_i^n, \frac{\partial u_{0N}}{\partial n_k} \right)_{N, \partial\Omega_k}. \quad (4.51)$$

Ancora per la formula discreta di Green si ottiene:

$$b_i^n = - \sum_{k=1}^m \left[a_{N,k}(u_{0N}, w_i^n) - (f, w_i^n)_{N, \Omega_k} \right], \quad (4.52)$$

e, per la scrittura (4.47) si ha:

$$b_i^n = - \sum_{k=1}^m \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \omega_{j_1 j_2}^{i,n} \left[a_{N,k}(u_{0N}, \varphi_{j_1, j_2}^k) - (f, \varphi_{j_1, j_2}^k)_{N, \Omega_k} \right]. \quad (4.53)$$

Infine, per (4.42), i coefficienti (4.51) si semplificano come:

$$b_i^n = - \sum_{k=1}^m \sum_{j_1, j_2} \omega_{j_1 j_2}^{i,n} \left[a_{N,k}(u_{0N}, \varphi_{j_1, j_2}^k) - (f, \varphi_{j_1, j_2}^k)_{N, \Omega_k} \right] \quad (4.54)$$

dove ancora la somma su j_1 e j_2 è ristretta ai soli nodi di $\partial\Omega_k$.

4.2.3 Note sulla soluzione del sistema algebrico

I problemi (4.42) e (4.43) ammettono su ogni sottodominio la seguente rappresentazione algebrica

$$A_{sp}^k \mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (4.55)$$

dove

A_{sp}^k è la matrice pseudo-spettrale di dimensione $N_t = (N+1)^2$ associata alla forma bilineare $a_{N,k}$,

\mathbf{u} è il vettore delle incognite,

\mathbf{b} è il vettore termine noto.

Come è stato accennato nel primo capitolo la matrice A_{sp}^k è riconducibile ad una matrice simmetrica eliminando opportunamente le righe e le colonne associate ai nodi di bordo.

Il sistema lineare (4.55) viene fattorizzato con l'algoritmo di Cholesky e, successivamente, risolto con la classica sostituzione all'indietro. Le matrici associate ai sottodomini sono indipendenti dalle condizioni al bordo e, quindi, possono essere assemblate e fattorizzate al passo 1 dell'algoritmo 4.1 (il costo computazionale è $\mathcal{O}(N_t^6/6)$ operazioni floating point per ogni sottodominio), mentre ad ogni iterazione di CG nel passo 2 il costo della risoluzione è di ($\mathcal{O}(N_t^4/2)$) operazioni floating point per ogni sottodominio.

4.2.4 L'algoritmo PDM e la sua parallellizzazione

Forniamo in questa sezione una descrizione, passo per passo, della implementazione del metodo PDM con approssimazione spettrale, mantenendo le notazioni introdotte sopra.

Passo 0 Costruzione delle funzioni di base.

Passo 1 Valutazione della soluzione u_{0_N} sui domini Ω_k e del termine noto $\mathbf{b} = [b_i^n]_{i=1}^{N_n}$ del sistema discreto (4.22). Si utilizza il seguente algoritmo:

per $k=1, \dots, m$

si risolve un problema di Dirichlet del tipo (4.42) su ogni Ω_k , si calcola la derivata normale di u_{0_N} su $\partial\Omega_k$ e si valutano i coefficienti b_i^n secondo la (4.54).

Passo 2 Calcolo della soluzione v_N^n , approssimazione spettrale della funzione $v^n \in H^n$ mediante la risoluzione del sistema lineare $\mathcal{S}_n \mathbf{v} = \mathbf{b}$ (4.22) tramite le iterazioni dell'algoritmo del Gradiente Coniugato:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0 = \mathcal{S}_n \mathbf{v}^0 - \mathbf{b};$$

per $k=1, \dots, m$

si risolve il problema (4.43) su Ω_k con incognita $v_{N_k}^0$ e quindi si calcolano i coefficienti u_i^0 con la formula (4.54).

$$res^0 = e = (\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0)$$

$\ell = 1, \dots$, fino a convergenza

$$\mathbf{q}^\ell = \mathcal{S}_n \mathbf{p}^{\ell-1};$$

per $k=1, \dots, m$

si risolve il problema (4.43) su Ω_k con incognita $p_{N_k}^0$ e quindi si calcolano i coefficienti q_i^0 con la formula (4.54).

$$\alpha = e / (\mathbf{q}^\ell, \mathbf{p}^{\ell-1})$$

$$\mathbf{v}^\ell = \mathbf{v}^{\ell-1} - \alpha \mathbf{p}^{\ell-1}$$

$$\mathbf{r}^\ell = \mathbf{r}^{\ell-1} - \alpha \mathbf{q}^\ell$$

$$res^\ell = (\mathbf{r}^\ell, \mathbf{r}^\ell) / e$$

se $(res^\ell < \varepsilon)$ si è raggiunta la convergenza

$$\beta = res^\ell / res^{\ell-1}$$

$$\mathbf{p}^\ell = \mathbf{r}^\ell + \beta \mathbf{p}^{\ell-1}$$

Passo 3 $u_N = u_{0_N} + v_N^n$ definita su Ω è la soluzione numerica approssimante la soluzione u del problema originario.

L'algoritmo descritto ha un ottimo livello di parallelismo. In effetti, quando viene utilizzato l'operatore di Poincaré-Steklov i calcoli su ogni sottodominio sono indipendenti da ciò che accade negli altri sottodomini e, quindi, il grado di parallelismo è uguale al numero di sottodomini.

4.2.5 Risultati Numerici

Presentiamo alcuni risultati ottenuti col metodo PDM applicato a problemi ellittici, al variare della decomposizione del dominio computazionale e del grado dell'approssimazione spettrale usata in ciascun sottodominio.

Viene inoltre riportato un sistematico confronto col metodo di Dirichlet/Neumann (si vedano [48], [54], [55] per una descrizione del metodo).

Come termine di confronto tra i due metodi è preso il numero di iterazioni che i due schemi richiedono per giungere a convergenza con una tolleranza fissata a $\varepsilon = 10^{-12}$. Si osserva che ad ogni iterazione sia dello schema PDM che dello schema Dirichlet/Neumann devono essere risolti M problemi ellittici ai limiti. Questo significa che una iterazione di PDM ha un costo computazionale dello stesso ordine di grandezza del costo computazionale di una iterazione dello schema Dirichlet/Neumann. Qualora si effettui una implementazione parallela degli algoritmi si osserva che lo schema PDM ha un livello di parallelismo doppio rispetto a quello dello schema Dirichlet/Neumann, infatti mentre ad ogni iterazione dello schema PDM gli M problemi differenziali sono fra loro indipendenti, nello schema D/N la risoluzione di $M/2$ problemi deve precedere la risoluzione degli altri $M/2$ problemi.

Il termine noto f e le condizioni al bordo g sono stati scelti in modo da originare soluzioni analitiche note. A meno di indicazioni contrarie, in tutti gli esperimenti sono state impiegate condizioni di Dirichlet su tutto il bordo.

Indichiamo con

$$err := \log_{10} \frac{\|u_N - u\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \quad (4.56)$$

il logaritmo dell'errore relativo in norma H^1 e con NIT il numero di iterazioni di CG in PDM o il numero di iterazioni dello schema Dirichlet/Neumann (che indicheremo d'ora in poi con D/N) fissata la tolleranza di $\varepsilon = 10^{-12}$.

Innanzitutto analizziamo NIT rispetto al numero di funzioni di base n (o equivalentemente al grado N dell'approssimazione spettrale usata) su ogni interfaccia della decomposizione. Il dominio Ω è stato suddiviso in M sottodomini in una direzione

	PDM				D/N			
	soluzione (a)		soluzione (b)		soluzione (a)		soluzione (b)	
N	err	NIT	err	NIT	err	NIT	err	NIT
4	0.93	3	-1.12	19	0.93	26	-1.12	44
8	-0.51	7	-4.01	21	-0.52	22	-4.01	40
12	-1.64	9	-7.60	21	-1.65	16	-7.59	39
16	-3.29	9	-11.65	21	-3.29	7	-11.67	40
20	-5.42	10	-12.70	22	-5.42	4	-12.69	38
24	-7.91	10	-12.48	22	-7.91	4	-12.41	43
28	-10.69	10	-11.73	22	-10.70	4	-11.79	45
32	-13.02	10	-11.50	22	-13.02	4	-11.63	43

Tabella 4.1: Numero di iterazioni e logaritmo dell'errore. Ω è suddiviso in M sottodomini equispaziati $\Omega_i = (x_{a_i}, x_{b_i}) \times (y_a, y_b)$ con $\kappa = 0$. Le soluzioni test sono: (a) $u(x, y) = \sin(7\pi x)\sin(7\pi y)$ su $\Omega = (0, 4) \times (0, 1)$ diviso in 6 sottodomini allineati, e (b) $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(2\pi y)$ con $\lambda = 20 - 2(100 + \pi^2)^{1/2}$ su $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ diviso in 8 sottodomini allineati.

(decomposizione a striscia) (4.1) o in $M \times M$ sottodomini quadrati (decomposizione con cross-points ovvero punti interni al dominio computazionale comuni ad almeno tre domini) (4.2) e (4.3).

In accordo con la teoria, per decomposizione a striscia, NIT è limitato uniformemente da N essendo la decomposizione priva di cross-point, sia per lo schema PDM che per lo schema D/N.

Per un numero fissato di sottodomini che presentino cross-point, NIT dipende teoricamente dal logaritmo del grado dei polinomi N per D/N ([54]), mentre per PDM è uniformemente indipendente.

Per un dato dominio Ω , fissato il grado di approssimazione N su ogni sottodominio, la velocità di convergenza dipende sia per PDM che per D/N, dal numero di sottodomini considerati. Lo si può osservare dalle figure (4.1) e (4.2). Nella prima ci si riferisce ad una partizione di tipo striscia di Ω , nella seconda ad una partizione con cross-point. Le soluzioni test usate sono: (a) $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(2\pi y)$ con $\lambda = 20 - 2\sqrt{100 + \pi^2}$ e (b) $u(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2}$. In entrambi i casi $N = 8$ e $\kappa = 0$. La dipendenza dal numero di sottodomini è logaritmica per entrambe le procedure, ma

N	PDM				D/N			
	soluzione (a)		soluzione (b)		soluzione (a)		soluzione (b)	
	err	NIT	err	NIT	err	NIT	err	NIT
4	1.64	7	-0.21	13	1.64	22	-0.21	28
8	-0.19	14	-1.20	19	-0.19	39	-1.21	36
12	-1.38	16	-3.22	21	-1.38	43	-3.22	46
16	-3.14	17	-5.71	21	-3.14	58	-5.71	62
20	-5.27	17	-8.60	22	-5.27	44	-8.60	57
24	-7.76	18	-11.80	22	-7.76	57	-11.80	68
28	-10.55	18	-12.63	22	-10.55	57	-11.57	66
32	-13.19	18	-12.49	23	-13.33	65	-12.50	62

Tabella 4.2: Numero di iterazioni e logaritmo dell'errore. $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$ è diviso in 4 sottodomini con un cross-point, con $\kappa = 0$. Le soluzioni test sono (a) $u(x, y) = \sin(7\pi x)\sin(7\pi y) + 1$ e (b) $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(5\pi y)$ con $\lambda = -10$.

N	PDM				D/N			
	soluzione (a)		soluzione (b)		soluzione (a)		soluzione (b)	
	err	NIT	err	NIT	err	NIT	err	NIT
4	-0.12	29	-1.01	31	-0.12	53	-1.01	57
8	-2.16	31	-3.48	32	-2.16	74	-3.48	83
12	-4.71	32	-6.65	32	-4.71	86	-6.65	84
16	-7.78	32	-10.32	32	-7.78	89	-10.32	90
20	-11.24	32	-12.36	32	-11.24	102	-12.14	99
24	-12.37	32	-12.44	32	-12.81	102	-11.99	103

Tabella 4.3: Numero di iterazioni e logaritmo dell'errore.. $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$ è diviso in 16 sottodomini uguali con 9 cross-point; si è preso $\kappa = 0$. Le soluzioni test sono (a) $u(x, y) = \sin(7\pi x)\sin(7\pi y) + 1$ e (b) $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(5\pi y)$ con $\lambda = -10$.

N	soluzione (a)		soluzione (b)	
	err	NIT	err	NIT
4	1.72	28	0.27	29
8	-0.19	42	-1.04	41
12	-1.38	44	-3.12	42
16	-3.13	44	-5.64	44
20	-5.27	45	-8.54	44
24	-7.76	45	-11.75	46
28	-10.54	45	-12.39	45
32	-11.83	46	-12.24	45

Tabella 4.4: Numero di iterazioni per PDM e logaritmo dell'errore. $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$ è diviso in 16 sottodomini uguali con $\kappa = 0$. Sono state imposte condizioni di Neumann sui lati verticali e condizioni di Dirichlet su quelli orizzontali. Le soluzioni test sono (a) $u(x, y) = \sin(7\pi x)\sin(7\pi y) + 1$ e (b) $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(5\pi y)$ con $\lambda = -10$.

presenta una costante nettamente più favorevole nel caso di PDM.

Consideriamo ora due casi test su domini computazionali non rettangolari. Entrambi i casi sono stati risolti con il metodo PDM.

Nel primo caso consideriamo il dominio rappresentato in figura (4.3) sul quale operiamo una decomposizione in 4, 16 e 64 sottodomini. In figura mostriamo la prima di queste suddivisioni, le altre si ottengono dividendo ciascun quadrato in altri quadrati e via dicendo. La soluzione test considerata è data da $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(3\pi y)$ con $\lambda = -10$, $\kappa = 0$ e N . Imponiamo una condizione al bordo di Neumann sul bordo $\partial\Omega^N = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, x = 3\}$.

Nella tabella (4.5) riportiamo il logaritmo dell'errore nella norma di $H^1(\Omega)$, nonché il numero di iterazioni di CG necessarie per raggiungere la tolleranza fissata sulla soluzione (pari a $\varepsilon = 10^{-12}$).

Nel secondo esempio consideriamo il dominio di figura (4.4) ed una decomposizione in 16, 64 e 256 sottodomini. Al solito mostriamo in figura solo la prima decomposizione, essendo le altre ottenibili con la stessa modalità del caso precedente. Si considera come soluzione test $u(x, y) = 1 - e^{\lambda x}\cos(3\pi y)$ con $\lambda = -10$, $\kappa = 1$ e N .

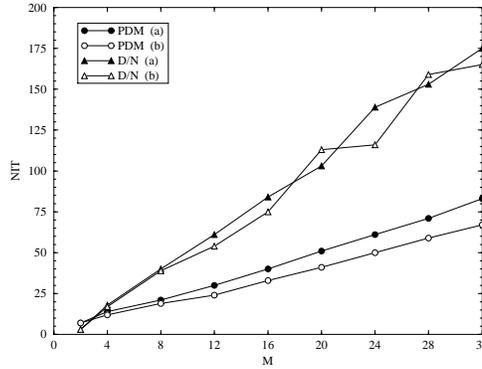


Figura 4.1: Il numero di iterazioni di PDM e D/N rispetto al numero di sottodomini. Ω è diviso in M sottodomini uguali $\Omega_i = (x_{a_i}, x_{b_i}) \times (y_a, y_b)$ privi di cross-point.

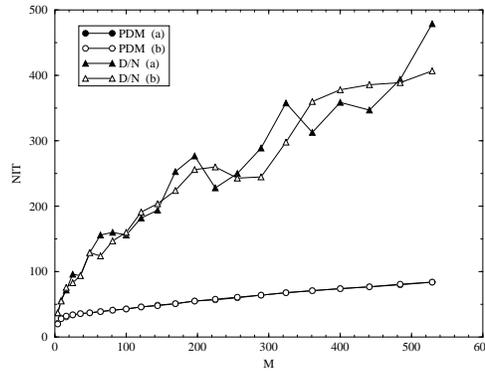


Figura 4.2: Il numero di iterazioni in presenza di un cross-point con $\Omega = (-1, 2) \times (-1, 2)$ diviso in $M = M_1 \times M_1$ sottodomini uguali.

	$M = 4$		$M = 16$		$M = 64$	
N	err	NIT	err	NIT	err	NIT
4	-0.40	12	-1.78	39	-3.12	43
8	-2.67	23	-5.28	48	-7.81	42
12	-5.73	24	-9.30	49	-12.41	43
16	-9.16	25	-12.17	52	-12.41	43

Tabella 4.5: Numero di iterazioni di PDM per risolvere il problema presentato in figura (4.3).

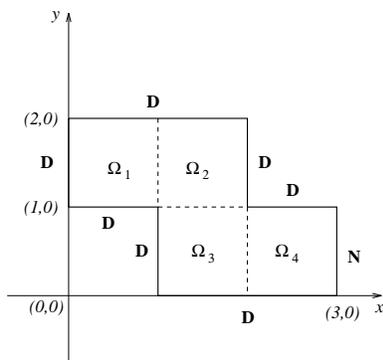


Figura 4.3: Il dominio computazionale del primo esempio. Le lettere D e N indicano su quali parti di bordo si siano imposte condizioni di Dirichlet e di Neumann, rispettivamente.

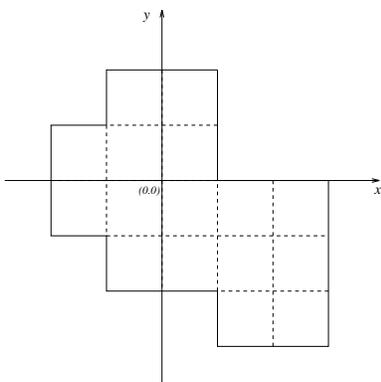


Figura 4.4: Il dominio computazionale per il secondo esempio.

In questo caso sono state imposte solo condizioni di Dirichlet su tutto il bordo $\partial\Omega$.

Nella tabella (4.6) riportiamo il logaritmo dell'errore in norma $H^1(\Omega)$ ed il numero di iterazioni necessarie a CG per raggiungere la tolleranza fissata.

Come è già stato ricordato, il numero di iterazioni cresce in modo logaritmico all'aumentare di M , ma si mantiene uniformemente limitato al crescere di N .

	$M = 16$		$M = 64$		$M = 256$	
N	err	NIT	err	NIT	err	NIT
4	-0.45	31	-1.80	40	-3.12	61
8	-2.68	33	-5.29	40	-7.81	61
12	-5.79	34	-9.31	40	-12.35	62
16	-9.16	34	-12.07	41	-12.35	62

Tabella 4.6: Numero di iterazioni del metodo PDM per la risoluzione del problema ellittico sul caso test rappresentato in figura (4.4).

Capitolo 5

Il metodo degli elementi spettrali

In questo capitolo viene svolta una breve introduzione al metodo degli elementi spettrali conformi e viene presentato un preconditionatore basato sul metodo di decomposizione di domini Schwarz, per la matrice ottenuta dalla discretizzazione elementi spettrali del problema di diffusione trasporto.

5.1 Approssimazione del problema ellittico

Sia Ω un dominio aperto in \mathbb{R}^2 di bordo $\partial\Omega$ continuo e lipschiziano. Si definisce su Ω una decomposizione \mathcal{T}_H in elementi quadrangolari disgiunti T_k , con $k = 1, \dots, Ne$, tali che

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{Ne} \bar{T}_k, \quad (5.1)$$

con l'ipotesi che la decomposizione \mathcal{T}_H sia geometricamente conforme, ovvero tale che l'intersezione tra la frontiera di due elementi adiacenti coincida o con un vertice o con un intero lato degli elementi stessi. Sia

$$H = \max_{T_k \in \mathcal{T}_H} \text{diam}(T_k), \quad \text{diam}(T_k) = \text{massimo lato di } T_k, \quad k = 1, \dots, Ne \quad (5.2)$$

e si supponga che i diametri degli elementi T_k siano uniformemente inferiormente limitati.

In figura (5.1) è mostrata una possibile decomposizione di un dominio Ω in quadrilateri.

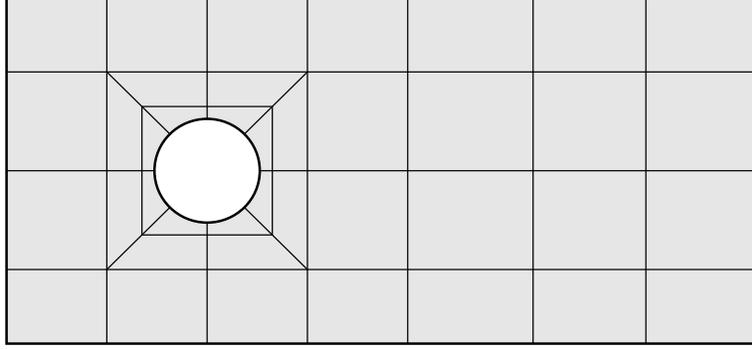


Figura 5.1: Una possibile decomposizione del dominio Ω in quadrilateri

I quadrilateri T_k siano l'immagine, mediante una mappa \mathbf{F}_k del tipo (1.36), del dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ e, per ogni $k = 1, \dots, Ne$, si denoti con

$$\mathcal{M}_N^k = \{(x_i^k, y_j^k) = \mathbf{F}_k(\xi_i, \eta_j), \quad i, j = 1, \dots, N + 1\} \quad (5.3)$$

l'insieme delle immagini in Ω_k dei nodi LGL definiti in $\hat{\Omega}$, essendo stato fissato N uguale su tutti gli elementi in \mathcal{T}_H .

Per semplicità di notazione il parametro \mathcal{H} rappresenti la coppia di parametri (N, H) dai quali dipende la discretizzazione che stiamo per descrivere.

Sia $\mathbb{Q}_N(T_k)$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a N in ciascuna variabile, definiti su T_k e sia

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_{T_k} \in \mathbb{Q}_N(T_k), \quad \forall T_k \in \mathcal{T}_H\}. \quad (5.4)$$

Quindi, per $u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}} \in \mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega)$, si definisce il seguente prodotto scalare discreto:

$$(u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H}, \Omega} = \sum_{k=1}^{Ne} (u_{N,k}, v_{N,k})_{N, T_k}, \quad (5.5)$$

dove si è posto $u_{N,k} = u_{\mathcal{H}}|_{T_k}$, $v_{N,k} = v_{\mathcal{H}}|_{T_k}$ e dove $(\cdot, \cdot)_{N, T_k}$ è il prodotto scalare discreto definito in (1.41).

Si riprenda la formulazione variazionale (2.3)-(2.5) del problema (2.1) con le ipotesi di coercività (2.6) e (2.8) sulla forma bilineare (2.4). Si consideri la formulazione Galerkin generalizzato seguente:

$$\text{trovare } u_{\mathcal{H}} \in V_{\mathcal{H}} : \quad a_{\mathcal{H}}(u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}}) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(v_{\mathcal{H}}) \quad \forall v_{\mathcal{H}} \in V_{\mathcal{H}} \quad (5.6)$$

dove \mathcal{H} è il parametro di discretizzazione, $\{V_{\mathcal{H}}\}$ è la famiglia di sottospazi di dimensione finita in $V = H_{0,\partial\Omega_D}^1(\Omega)$:

$$V_{\mathcal{H}} = V \cap \mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega) \quad (5.7)$$

e dove $a_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ sono opportune approssimazioni della forma bilineare continua (2.4) e del funzionale lineare (2.5).

Per ogni $u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}} \in V_{\mathcal{H}}$ si definisce la forma bilineare discreta $a_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{H}}(u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}}) &= \sum_{k=1}^{Ne} a_{N,k}(u_{N,k}, v_{N,k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{Ne} \left[(\nu \nabla u_{N,k} - \mathbf{b} u_{N,k}, \nabla v_{N,k})_{N,T_k} + (b_0 u_{N,k}, v_{N,k})_{N,T_k} \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

nella quale l'integrale su Ω è stato sostituito dalla somma di integrali ristretti ai vari elementi della decomposizione \mathcal{T}_H , a loro volta approssimati con formule di quadratura di Legendre Gauss-Lobatto.

In maniera analoga, per ogni funzione $v_{\mathcal{H}} \in V_{\mathcal{H}}$, viene definito il funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(v_{\mathcal{H}}) = \sum_{k=1}^{Ne} \left[(f, v_{N,k})_{N,T_k} + (h, v_{N,k})_{N,\partial T_k \cap \partial\Omega} \right]. \quad (5.9)$$

Lemma 5.1 La forma bilineare $a_{\mathcal{H}}$ è uniformemente coerciva in $V_{\mathcal{H}} \times V_{\mathcal{H}}$.

Dimostrazione

Per definizione della forma $a_{\mathcal{H}}$ si ha:

$$a_{\mathcal{H}}(u_{\mathcal{H}}, u_{\mathcal{H}}) = \sum_{k=1}^{Ne} a_{N,k}(u_{N,k}, u_{N,k}) \quad (5.10)$$

e per l'uniforme coercività delle forme $a_{N,k}$ sugli elementi $T_k \in \mathcal{T}_H$ si ha la tesi (si veda il teorema 1.2). \square

Per il teorema 3.1 (Lemma di Strang) il problema (5.6) ammette un'unica soluzione $u_{\mathcal{H}}$ approssimante la soluzione u del problema continuo (1.14).

Nel caso in cui si consideri il problema ellittico (2.1) con $\nu = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $b_0 = 0$ e condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, si ha la seguente stima ([28]):

$$\|u - u_{\mathcal{H}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left[N^{1-s} \|u\|_{H^s(\Omega)} + N^{-r} \|f\|_{H^r(\Omega)} \right] \quad (5.11)$$

per $u \in H_0^s(\Omega)$, $f \in H^r(\Omega)$ per $s > 1$, $r > 2$.

5.2 Interpretazione algebrica

Sia

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}} = \bigcup_{k=1}^{N_e} \mathcal{M}_N^k \quad (5.12)$$

l'insieme dei nodi di quadratura della decomposizione \mathcal{T}_H , e sia N_t il numero globale di nodi in $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$.

Nello spazio $V_{\mathcal{H}}$ (5.4) si consideri la base delle funzioni di Lagrange

$$\beta_{\mathcal{H}} = \{\varphi_i \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap V : \varphi_i|_{T_k} \in \mathbb{Q}_N(T_k), \quad \forall T_k \in \mathcal{T}_H, \quad i = 1, \dots, N_t\} \quad (5.13)$$

definita sui nodi della mesh $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$.

Per definizione dello spazio $V_{\mathcal{H}}$ le funzioni della base (5.13) sono globalmente continue ed hanno un supporto ristretto all'elemento T_k se sono associate ad un nodo interno all'elemento T_k , un supporto esteso a due o più elementi adiacenti se sono associate a nodi appartenenti alla frontiera comune tra gli elementi stessi.

Per ogni $u_{\mathcal{H}} \in V_{\mathcal{H}}$ si ha la seguente rappresentazione, combinazione lineare delle funzioni della base $\beta_{\mathcal{H}}$:

$$u_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_t} u_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (5.14)$$

e, posto $v_{\mathcal{H}} = \varphi_i$ per ogni $i = 1, \dots, N_t$, si ha:

$$a_{\mathcal{H}}(u_{\mathcal{H}}, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N_t} u_j a_{\mathcal{H}}(\varphi_j, \varphi_i) = \left(\sum_{j=1}^{N_t} u_j \sum_{k=1}^{N_e} a_{N,k}(\varphi_j|_{T_k}, \varphi_i|_{T_k}) \right). \quad (5.15)$$

Per ogni $i = 1, \dots, N_t$ il funzionale $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ diventa:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\varphi_i) = \sum_{k=1}^{N_e} \left[(f, \varphi_i)_{N,T_k} + (h, \varphi_i)_{N,\partial T_k \cap \partial \Omega} \right]. \quad (5.16)$$

Ponendo

$$(A_{\mathcal{H}})_{ij} = a_{\mathcal{H}}(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, N_t \quad (5.17)$$

e

$$\mathbf{u} = [u_j]_{j=1}^{N_t}, \quad \mathbf{f} = [\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\varphi_i)]_{i=1}^{N_t} \quad (5.18)$$

la formulazione matriciale del problema (5.6) è:

$$A_{\mathcal{H}} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (5.19)$$

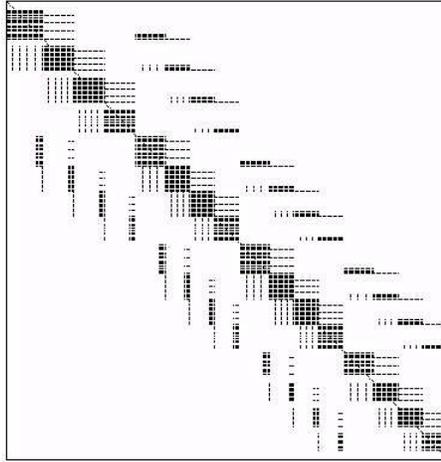


Figura 5.2: La struttura della matrice $A_{\mathcal{H}}$ relativa alla decomposizione di un dominio quadrato in 4×4 elementi uguali.

Il sistema (5.19) ha dimensione N_t , la matrice $A_{\mathcal{H}}$ è definita positiva ed è riconducibile ad una matrice simmetrica, nel caso in cui $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, eliminando opportunamente le righe e le colonne associate ai nodi del bordo $\partial\Omega_D$. In figura (5.2) si può osservare la struttura della matrice $A_{\mathcal{H}}$ relativa ad una decomposizione di un dominio quadrato in 4×4 elementi uguali.

Si è osservato sperimentalmente che il numero di condizionamento della matrice $A_{\mathcal{H}}$ osserva la seguente dipendenza dai parametri N e H :

$$\chi(A_{\mathcal{H}}) = \mathcal{O}(N^3 H^{-2}). \quad (5.20)$$

Si può osservare tale dipendenza dalle tabelle (5.1) e (5.2) in cui si è considerato il problema (5.6) sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$, con $\nu \equiv 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $b_0 \equiv 0$ e condizioni al bordo di tipo Dirichlet. La decomposizione \mathcal{T}_H scelta su Ω è formata da $Ne = M \times M$ quadrati uguali, per cui risulta $H = 1/M$.

Per ogni $k = 1, \dots, Ne$ si definisce la matrice rettangolare di *restrizione* R_k , di dimensione $(N_t, (N + 1)^2)$, tale che se \mathbf{x} è un vettore di dimensione N_t , si abbia:

$$(R_k \mathbf{x})_i = \begin{cases} x_i & \text{se } (\text{supp}(\varphi_i) \cap T_k) \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, (N + 1)^2 \quad (5.21)$$

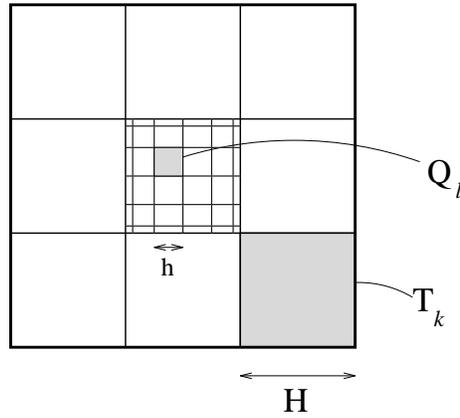
le quali permettono di passare dalla numerazione globale a quella locale. Le matrici R_k^T , trasposte delle matrici R_k sono dette di *restrizione* e permettono di passare

N	M	H	$\chi(A_{\mathcal{H}})$
4	1	1	31.157
4	2	1/2	81.957
4	3	1/3	166.454
4	4	1/4	318.367
4	5	1/5	477.458
4	6	1/6	707.760

Tabella 5.1: Il numero di condizionamento della matrice $A_{\mathcal{H}}$ al variare dell'ampiezza H degli elementi spettrali.

N	M	$\chi(A_{\mathcal{H}})$
4	4	318.367
5	4	510.317
6	4	797.263
7	4	1167.924
8	4	1726.1263

Tabella 5.2: Il numero di condizionamento della matrice $A_{\mathcal{H}}$ al variare del grado N di interpolazione su ogni elemento spettrale.

Figura 5.3: Le decomposizioni \mathcal{T}_H e \mathcal{Q}_h in Ω

dalla numerazione locale a quella globale.

Si osserva che la matrice $A_{\mathcal{H}}$ può essere riscritta come:

$$A_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{Ne} R_k^T A_k R_k, \quad (5.22)$$

dove

$$(A_k)_{ij} = a_{N,k}(\varphi_j, \varphi_i) \quad i, j = 1, \dots, (N+1)^2 \quad (5.23)$$

è la matrice di discretizzazione spettrale associata all'elemento T_k della decomposizione \mathcal{T}_H .

5.3 Il preconditionatore Schwarz additivo

Si consideri la mesh $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ (5.12) e la mesh seguente

$$\mathcal{M}_0 = \{\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}} : \mathbf{x}_i \text{ è vertice di almeno un elemento } T_k \in \mathcal{T}_H\}. \quad (5.24)$$

La prima mesh viene detta *mesh fine* ed induce la decomposizione $\mathcal{Q}_h = \{Q_l\}$, mentre la seconda è detta *mesh rada* ed induce la decomposizione $\mathcal{T}_H = \{T_k\}$ già introdotta all'inizio del capitolo (si veda la figura 5.3) e sia N_0 il numero di nodi in \mathcal{M}_0 . Si definisce lo spazio delle funzioni definite sulla mesh fine:

$$V_h = \{v \in V : v|_{Q_l} \in \mathcal{Q}_1(Q_l), \forall Q_l \in \mathcal{Q}_h\} \quad (5.25)$$

e lo spazio V_0 delle funzioni definite sulla mesh larga:

$$V_0 = \{v \in V : v|_{T_k} \in \mathbb{Q}_1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H\}. \quad (5.26)$$

Si considerano le seguenti basi, rispettivamente in V_h ed in V_0 :

$$\beta_h = \{\psi_i^h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap V : \psi_i^h|_{Q_l} \in \mathbb{Q}_1(Q_l), \forall Q_l \in \mathcal{Q}_h, i = 1, \dots, N_t\}, \quad (5.27)$$

$$\beta_0 = \{\psi_i^0 \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap V : \psi_i^0|_{T_k} \in \mathbb{Q}_1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H, i = 1, \dots, N_0\}. \quad (5.28)$$

A questo punto si può introdurre un preconditionatore di tipo Schwarz additivo per elementi spettrali, in analogia a quanto è stato fatto per gli elementi finiti da Dryja e Widlund (si vedano [24], [25], [17]).

Sia T_k^e l'estensione dell'elemento $T_k \in \mathcal{T}_H$ e sia βH l'ampiezza della sovrapposizione tra un elemento T_k^e ed il suo adiacente. Si ha:

$$T_k^e = \mathcal{M}_N^k \cup \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \setminus T_k : d(\mathbf{x}, T_k) \leq \beta H\}. \quad (5.29)$$

Sia N_k il numero di nodi in T_k^e e siano $R_{k,e}$ le matrici di restrizione da Ω a T_k^e definite in maniera analoga a (5.21).

Quindi si definisce la matrice di discretizzazione del problema (5.6) con elementi spettrali bilineari sulla mesh rada \mathcal{M}_0 :

$$(A_0)_{ij} = \sum_{k=1}^{N_e} a_{1,T_k}(\psi_j^0, \psi_i^0) \quad i, j = 1, \dots, N_0, \quad (5.30)$$

e si definiscono le matrici $A_{k,e}$ di discretizzazione dello stesso problema sull'elemento esteso T_k^e ottenute mediante elementi spettrali bilineari definiti sulla mesh fine:

$$(A_{k,e})_{ij} = \sum_{\substack{l=1 \\ Q_l \in T_k^e}}^{N_e} a_{1,Q_l}(\psi_j^h, \psi_i^h) \quad i, j = 1, \dots, N_k \quad (5.31)$$

e completate con condizioni al bordo di tipo Dirichlet omogeneo sui tratti di frontiera ∂T_k^e interni al dominio computazionale Ω .

Infine sia R_0 la matrice di passaggio dalla base $\beta_{\mathcal{H}}$ alla base β_0 di dimensione (N_0, N_t) e sia R_0^T la trasposta di R_0 . La matrice R_0^T è associata ad una mappa di restrizione "pesata" dallo spazio delle funzioni di base definite sulla mesh fine allo spazio delle funzioni di base definite sulla mesh rada, mentre la matrice R_0 è associata ad una

mappa di interpolazione dallo spazio di funzioni definite sulla mesh fine allo spazio definito sulla mesh rada.

La matrice $a_{\mathcal{H}}$ elementi spettrali associata al problema di diffusione trasporto (2.1) viene preconditionata con la matrice P_{as} la cui inversa è definita nel modo seguente:

$$P_{as}^{-1} = R_0^T A_0^{-1} R_0 + \sum_{k=1}^{Ne} R_{k,e}^T A_{k,e}^{-1} R_{k,e}. \quad (5.32)$$

Qualora la forma bilineare a sia associata all'operatore con b_0 , $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, Dryja e Widlund ([24], [25]) hanno dimostrato per l'approssimazione elementi finiti che $\exists C > 0$ indipendente da H e h tale che

$$\chi(P_{as}^{-1} A_{\mathcal{H}}) \leq C(1 + \beta^{-1}) \quad (5.33)$$

dove βH è l'ampiezza della sovrapposizione fra gli elementi.

All'interno di uno schema di tipo gradiente coniugato, calcolare il vettore

$$t = P_{as}^{-1} A_{\mathcal{H}} s \quad (5.34)$$

con t e $s \in \mathbb{R}^{N_t}$ vuol dire calcolare

$$t = R_0^T A_0^{-1} R_0 A_{\mathcal{H}} s + \sum_{k=1}^{Ne} R_{k,e}^T A_{k,e}^{-1} R_{k,e} A_{\mathcal{H}} s \quad (5.35)$$

ovvero:

- calcolare $\tilde{s} = A_{\mathcal{H}} s$,
- proiettare il vettore \tilde{s} sullo spazio delle funzioni definite sulla mesh rada, ovvero calcolare $\tilde{s}_0 = R_0 \tilde{s}$ con $(R_0)_{ij} = \psi_i^0(x_j)$ essendo x_j il nodo della griglia fine associato alla funzione di base φ_j
- calcolare \tilde{t}_0 : $A_0 \tilde{t}_0 = \tilde{s}_0$
- calcolare $t_0 = R_0^T \tilde{t}_0$
- per $k = 1, \dots, Ne$ $\forall \varphi_i \in \beta_{\mathcal{H}}$
 - costruire $\tilde{s}_k = R_{k,e} \tilde{s}$

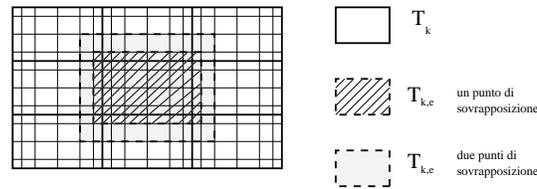


Figura 5.4: La suddivisione di un dominio in elementi spettrali T_k e la costruzione degli elementi estesi $T_{k,e}$ con uno o due punti di sovrapposizione

– calcolare \tilde{t}_k : $A_{k,e}\tilde{t}_k = \tilde{s}_k$

– costruire $t_k = R_{k,e}^T \tilde{t}_k$

$$\bullet t = t_0 + \sum_{k=1}^{Ne} t_k$$

Osservazione 5.1 Vale la pena di osservare che il preconditionatore è stato costruito su una discretizzazione elementi spettrali bilineari, sia per quanto riguarda il problema sulla mesh rada, sia per quanto riguarda il problema definito sulla mesh fine, mentre la matrice $A_{\mathcal{H}}$ relativa alla discretizzazione primaria del problema deriva da una discretizzazione elementi spettrali di grado N su ogni elemento T_k . \square

Nelle tabelle che seguono è riportato il numero di iterazioni necessarie all'algoritmo BiCGStab preconditionato con la matrice P_{as} per ridurre il residuo di cinque ordini di grandezza, nella determinazione della soluzione del problema (2.1) definito sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$. Quale soluzione test è stata considerata la funzione $u(x, y) = e^{x+y}$, la viscosità è stata fissata $\nu = 1$, mentre i valori di \mathbf{b} e b_0 vengono specificati di volta in volta. Per n punti di sovrapposizione si intende che l'elemento T_k è stato esteso sui domini adiacenti per n striscie di nodi in ogni direzione di discretizzazione (si veda la figura (5.4)).

I risultati ottenuti sono in analogia con il risultato teorico dimostrato da Dryja e Widlund per una discretizzazione elementi finiti.

Si è considerato un dominio computazionale quadrato suddiviso in $M \times M$ elementi uguali su ognuno dei quali è stato considerato un grado di approssimazione spettrale uguale a N .

N	M									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	9	13	16	18	17	19	19	19	19	19
4	9	13	15	16	15	16	16	16	16	16
5	11	15	17	17	17	18	17	17	17	17
6	12	15	17	17	17	18	18	18	18	18
7	14	16	15	16	16	16	16	16	16	16
8	14	15	17	17	15	15	15	16	16	16
9	16	17	17	16	16	16	16	18	18	18

Tabella 5.3: Numero di iterazioni del CG preconditionato con P_{as} con **un** punto di sovrapposizione per risolvere il problema (2.1) con $\mathbf{b} = (0, 0)$ e $b_0 = 0$.

N	M									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	15	18	21	24	26	26	27	27	27
3	10	16	23	25	27	27	27	28	28	28
4	12	16	22	23	24	24	24	23	24	23
5	13	15	19	21	21	21	21	21	21	21
6	12	16	19	19	20	20	19	20	20	20
7	12	15	16	18	18	18	18	18	17	17
8	13	16	15	17	16	16	16	16	16	16
9	14	16	16	16	16	16	16	16	16	16

Tabella 5.4: Numero di iterazioni del CG preconditionato con P_{as} con **due** punti di sovrapposizione per risolvere il problema (2.1) con $\nu = 1$, $\mathbf{b} = (0, 0)$ e $b_0 = 0$.

N	M									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	7	14	20	37	41	42	42	42	42	43
3	10	16	23	25	27	27	28	28	28	28
4	12	16	22	23	24	24	24	23	24	23
5	13	16	23	25	27	28	29	29	30	30
6	13	15	19	23	25	25	24	25	25	25
7	13	16	22	26	29	29	29	29	30	30
8	13	15	20	25	26	26	26	26	26	26

Tabella 5.5: Numero di iterazioni del CG preconditionato con P_{as} con $(N + 1)/2$ punti di sovrapposizione per risolvere il problema (2.1) con $\nu = 1$, $\mathbf{b} = (0, 0)$ e $b_0 = 0$.

N	M									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	11	14	14	13	12	13	13	13
4	7	8	10	12	10	10	10	11	11	11
5	7	10	12	12	11	11	11	11	11	11
6	8	10	11	12	13	11	13	12	15	12
7	10	10	11	11	11	11	11	11	11	10
8	11	10	10	11	11	11	11	11	11	11
9	11	12	12	12	11	11	12	11	11	11

Tabella 5.6: Numero di iterazioni del BiCGStab preconditionato con P_{as} con **un** punto di sovrapposizione per risolvere il problema (2.1) con $\nu = 1$, $\mathbf{b} = (1, x + y)$, $b_0 = 1$ su $\Omega = (0, 1)^2$.

Parte III

L'equazione di Navier-Stokes

Capitolo 6

Il problema di Navier-Stokes

Per lo studio delle equazioni di Navier Stokes si è seguita l'impostazione euleriana secondo cui ad un certo istante temporale $t \in [0, T]$ il moto di un fluido viene descritto mediante il campo di velocità e la pressione a cui esso è sottoposto. Si consideri un dominio aperto e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1 a tratti) e sia $\mathbf{u}(x, y) = [u_1(x, y), u_2(x, y)]^T$ il campo di velocità incognito, sia $p = p(x, y)$ la pressione, sia $\rho = \rho(x, y)$ la densità di massa.

L'equazione di continuità e l'equazione di bilancio della quantità di moto, unitamente all'equazione costitutiva per fluidi Newtoniani conduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (6.1)$$

dove λ e μ sono costanti positive dette *coefficienti di Lamè* (introdotte nell'equazione costitutiva dei fluidi viscosi Newtoniani), \mathbf{f} è la forza per unità di volume agente sul fluido.

Considerando ora fluidi incompressibili, tali da soddisfare la condizione $\frac{d\rho}{dt} = 0$ e con densità omogenea in Ω , si perviene alla forma classica delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi viscosi omogenei incompressibili:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (6.2)$$

dove si è posto $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ e in cui si è rinominato il rapporto p/ρ con p .

Le equazioni di Navier Stokes sono completate da una condizione iniziale al tempo zero:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\} \quad (6.3)$$

e da opportune condizioni al bordo. In questa sede è stata fatta la scelta di porre una condizione omogenea di Dirichlet sulle pareti fisse del dominio computazionale (condizione “no-slip”):

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\Omega_D \times (0, T) \quad (6.4)$$

ed una condizione del tipo

$$\tilde{T}\mathbf{n} \equiv -p\mathbf{n} + \nu(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{h} \quad \text{su } \partial\Omega_N \times (0, T) \quad (6.5)$$

sulla parte di bordo del dominio che rappresenta un bordo fittizio. Nel caso in cui $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ la condizione (6.5) è detta condizione “no-friction”. Questa condizione viene utilizzata come condizione di outflow nello studio di moti all’interno di canali o spazi “computazionalmente” limitati.

Il simbolo \tilde{T} in (6.5) rappresenta il tensore degli sforzi associato al moto del fluido in questione e $\tilde{T}\mathbf{n}$ ne rappresenta la componente normale.

Il sistema completo delle equazioni di Navier Stokes per fluidi viscosi omogenei Newtoniani incomprimibili è pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \partial\Omega_D \times (0, T) \\ \tilde{T}\mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{su } \partial\Omega_N \times (0, T) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Osservazione 6.1 In questo capitolo viene presentata l’approssimazione con elementi spettrali del problema (6.1) unitamente alle tecniche di stabilizzazione sullo stile di Franca e Hughes ([27]). Quindi vengono presentati due preconditionatori per la matrice di discretizzazione elementi spettrali e vengono riportati i risultati numerici mostrandoti l’accuratezza degli schemi utilizzati e le buone proprietà dei preconditionatori utilizzati. Infine vengono riportati risultati delle simulazioni numeriche di numerosi casi test noti in letteratura. \square

6.1 Formulazione variazionale

Posto $\mathbf{V} = [H_{0,\partial\Omega_D}^1(\Omega)]^2$ e $Q = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\Omega = 0\}$, la formulazione variazionale di (6.6) si legge:

$$\forall t \in (0, T) \text{ trovare } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q : \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ \quad + b(\mathbf{v}, p(t)) = \mathcal{F}(t)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{u}(t), q) = 0 \quad \forall q \in Q \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

dove si definiscono:

$$\begin{aligned} a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega, \\ c : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} & c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega, \\ b : \mathbf{V} \times Q &\rightarrow \mathbb{R} & b(\mathbf{u}, q) &= - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega \\ \mathcal{F} : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} & \mathcal{F}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{h} \mathbf{v} d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (6.9)$$

con $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ e $\mathbf{h} \in L^2(0, T; [L^2(\partial\Omega_N)]^2)$.

Il problema (6.7) ammette unica soluzione (si vedano ad esempio [61], [32]).

Si osserva che il campo scalare di pressione può essere scelto oltre che nello spazio $L_0^2(\Omega)$ anche nello spazio $L^2(\Omega) \setminus \mathbb{R}$.

Dal punto di vista numerico scegliere la pressione nello spazio $L_0^2(\Omega)$ vuol dire sostituire una equazione sulla pressione con l'equazione di media integrale nulla, mentre sceglierla nello spazio $L^2(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ vuol dire fissare la pressione in un nodo della mesh.

Grandezza adimensionale caratteristica del problema (6.7) è il *numero di Reynolds*, una cui possibile definizione è:

$$Re = \frac{|\mathbf{u}_{\infty}| D}{\nu}. \quad (6.10)$$

con \mathbf{u}_∞ si è rappresentata la velocità tipica del fluido (ad esempio la velocità di deriva), con D una lunghezza caratteristica del dominio computazionale Ω . Il *numero di Reynolds* esprime il rapporto tra la convezione \mathbf{u}_∞ ed il coefficiente di diffusione ν ed in funzione della magnitudine del *numero di Reynolds* si potranno avere moti stazionari (con Re “basso”), moti periodici (con Re “medio”) e moti turbolenti o caotici (con Re “molto alto”).

In questo lavoro ci si limiterà ai casi di flusso laminare.

6.2 L’ approssimazione spazio-tempo

La discretizzazione spaziale secondo il metodo di Galerkin generalizzato del problema (6.7) è:

$$\forall t \in (0, T) \text{ trovare } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h : \quad (6.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h)_h + a_h(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) \\ \quad + b_h(\mathbf{v}_h, p_h(t)) = \mathcal{F}_h(t)(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(\mathbf{u}_h(t), q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{array} \right. \quad (6.12)$$

dove, come nei paragrafi precedenti, a_h , b_h , c_h , \mathcal{F}_h sono opportune approssimazioni delle corrispondenti forme a , b , c e del funzionale \mathcal{F} , mentre $(\cdot, \cdot)_h$ è una forma di quadratura approssimante l’integrale su Ω .

È ben noto che l’ approssimazione di tipo Galerkin dell’ equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili può presentare instabilità per due motivi. Anzitutto la natura diffusivo- convettiva dell’ equazione porta, per alti numeri di Reynolds, a generare oscillazioni spurie sul campo di velocità. Inoltre la formulazione mista del problema (6.12) comporta la presenza di modi spuri di pressione ovvero di funzioni $\hat{p}_h \in Q_h$ tali che

$$(\hat{p}_h, \text{div } \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (6.13)$$

Ne consegue che se $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ fosse soluzione del problema (6.12), lo sarebbero anche tutte le soluzioni del tipo

$$(\mathbf{u}_h, p_h + \alpha \hat{p}_h) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \hat{p}_h \text{ soddisfacente la condizione (6.13),} \quad (6.14)$$

e si genererebbe instabilità nel calcolo della pressione.

Il secondo tipo di instabilità può essere eliminato richiedendo che sia soddisfatta la *condizione di compatibilità* (o condizione *inf-sup* Ladyzenskaya-Brezzi-Babuska)

$$\exists \beta > 0 : \quad \forall q_h \in Q_h \quad \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0} : \quad (6.15)$$

$$(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)} \geq \beta \|\mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (6.16)$$

per la quale l'unico modo spurio di pressione ammissibile è la funzione $\hat{p}_h = 0$.

Da un punto di vista numerico la condizione di compatibilità comporta una limitazione sulla scelta degli spazi di dimensione finita \mathbf{V}_h e Q_h , ovvero si richiede che lo spazio delle velocità discrete sia sufficientemente ricco rispetto allo spazio delle pressioni discrete. In ambito elementi finiti diverse coppie di elementi soddisfano a questa proprietà. In ambito spettrale una scelta possibile consiste nel considerare polinomi di grado N per approssimare le velocità e polinomi di grado $N-2$ per approssimare le pressioni ([5], [45]).

Questo approccio, pur superando il problema dell'instabilità, presenta lo svantaggio di dover lavorare con griglie di punti differenti per il campo di velocità ed il campo di pressione, esso è generalmente seguito oltre che in ambito spettrale, anche nell'ambito dell'approssimazione ad elementi spettrali ([45], [44] e le referenze in essi citate).

Come si è detto sopra, nell'approssimazione di tipo Galerkin del problema (6.12), oltre all'instabilità sul campo delle pressioni, si ha instabilità anche sul campo delle velocità quando il numero di Reynolds è alto rispetto al livello di discretizzazione fissato.

In letteratura sono noti diversi schemi per la risoluzione del problema (6.12) che, trasformando il problema completo non lineare in una successione di problemi di Stokes e/o di problemi di diffusione trasporto che non risentono più dell'instabilità sul campo di velocità.

Si citano il metodo di Newton ([57]), il metodo di proiezione di Chorin e Temam ([18], [19], [60]), gli schemi a passi frazionari su opportune suddivisioni dell'operatore ("operator splitting") ([33], [49] [46]).

Negli ultimi anni sono state proposte tecniche di stabilizzazione per l'equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili, seguendo un approccio simile a quello adattato per le equazioni scalari di diffusione trasporto. Mediante queste tecniche vengono superate le instabilità sia sul campo di velocità che sul campo di pressione.

Per l'approssimazione del problema (6.12) si considerano le notazioni introdotte nel capitolo precedente.

Sia quindi \mathcal{T}_H una decomposizione conforme e regolare in Ω e siano T_k per $k = 1, \dots, Ne$ gli elementi della decomposizione \mathcal{T}_H . Su ogni elemento si fissi il grado di discretizzazione spettrale uguale a N , sia $\mathcal{H} = (N, H)$ il parametro rappresentante la discretizzazione elementi spettrali ed infine sia N_t il numero globale di nodi in Ω .

Volendo sostituire alla notazione generica dipendente dal parametro h la notazione introdotta nel capitolo 5, poniamo

$$\mathbf{V}_{\mathcal{H}} = \mathbf{V} \cap [\mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega)]^2 \quad Q_{\mathcal{H}} = Q \cap \mathbb{Q}_{\mathcal{H}}(\Omega). \quad (6.17)$$

Quindi, per ogni $\mathbf{v}_{\mathcal{H}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}}$ e $q_{\mathcal{H}} \in Q_{\mathcal{H}}$, definiamo $\mathbf{v}_{N,k} = \mathbf{v}_{\mathcal{H}}|_{T_k}$, $q_{N,k} = q_{\mathcal{H}}|_{T_k}$ e sostituiamo le forme discrete a_h , b_h e c_h con le seguenti:

$$a_{\mathcal{H}} : \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} \quad a_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) = \sum_{k=1}^{Ne} (\nu \nabla \mathbf{u}_{N,k}, \nabla \mathbf{v}_{N,k})_{N,T_k} \quad (6.18)$$

$$b_{\mathcal{H}} : \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \times Q_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} \quad b_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}, q_{\mathcal{H}}) = - \sum_{k=1}^{Ne} (q_{N,k}, \operatorname{div} \mathbf{v}_{N,k})_{N,T_k} \quad (6.19)$$

$$c_{\mathcal{H}} : \mathbf{V}_N \times \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} : \quad c_{\mathcal{H}}(\mathbf{w}_{\mathcal{H}}, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) = \sum_{k=1}^{Ne} ((\mathbf{w}_{N,k} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N,k}, \mathbf{v}_{N,k})_{N,T_k} \quad (6.20)$$

mentre il funzionale \mathcal{F}_h viene sostituito da:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} : \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R} : \quad \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) = \sum_{k=1}^{Ne} \left[(\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N,k})_{N,T_k} + (\mathbf{h}, \mathbf{v}_{N,k})_{N,\partial T_k \cap \partial \Omega_N} \right]. \quad (6.21)$$

Il problema (6.12) diventa:

$$\begin{cases} \forall t \in (0, T) \text{ trovare } (\mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), p_{\mathcal{H}}(t)) \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \times Q_{\mathcal{H}} : \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{v}_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H},\Omega} + a_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) + c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \\ \quad + b_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{H}}(t)) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(t)(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \\ b_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t), q_{\mathcal{H}}) = 0 \\ \mathbf{u}_{\mathcal{H}}(0) = \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}_{\mathcal{H}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \\ \forall q_{\mathcal{H}} \in Q_{\mathcal{H}} \end{array} \end{array} \quad (6.22)$$

6.2.1 Discretizzazione in tempo

Per la discretizzazione in tempo si è utilizzato uno schema alle differenze finite.

Fissato $\Delta t > 0$ si definisce la seguente discretizzazione sull'intervallo $(0, T)$: $t_0 = 0$, $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$, con $n = 1, \dots, \frac{T}{\Delta t}$; quindi si pone $\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n = \mathbf{u}_{\mathcal{H}}(t_n)$, $p_{\mathcal{H}}^n = p_{\mathcal{H}}(t_n)$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) = (\mathbf{f}(t_n), \mathbf{v}_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H}, \Omega} + (\mathbf{h}(t_n), \mathbf{v}_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H}, \partial\Omega_N}$.

Scegliendo lo schema del primo ordine *Eulero implicito*, il problema (6.22) discretizzato in tempo diventa:

per $n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$ determinare $(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, p_{\mathcal{H}}^{n+1}) \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \times Q_{\mathcal{H}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n}{\Delta t}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}} \right)_{\mathcal{H}, \Omega} + a_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) + c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \\ \quad + b_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{H}}^{n+1}) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{n+1}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{H}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \\ b_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, q_{\mathcal{H}}) = 0 \quad \forall q_{\mathcal{H}} \in Q_{\mathcal{H}} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^0 = \mathbf{u}_0. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Per risolvere il problema non lineare (6.23) si è scelto di linearizzarlo utilizzando lo schema *Eulero semiimplicito* al posto dello schema *Eulero implicito*, ovvero sostituendo il termine $c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}})$ con $c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}})$ e svolgendo una sola iterazione di tale schema per passo temporale.

Lo schema *Eulero semiimplicito* è uno schema del primo ordine incondizionatamente stabile ([59]). Un possibile schema del secondo ordine è lo schema CN-AB in cui si considera lo schema Crank-Nicolson per l'approssimazione della parte lineare e lo schema esplicito del secondo ordine Adams-Bashforth per l'approssimazione della parte non lineare dell'operatore. Esso è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n}{\Delta t/2}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}} \right)_{\mathcal{H}, \Omega} + a_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) + b_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{H}}^{n+1}) = \\ -a_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) - b_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{H}}^n) + \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{n+1}(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) + \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \\ + 3c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) - c_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n-1}, \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n-1}, \mathbf{v}_{\mathcal{H}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{H}} \in \mathbf{V}_{\mathcal{H}} \\ b_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^{n+1}, q_{\mathcal{H}}) = 0 \quad \forall q_{\mathcal{H}} \in Q_{\mathcal{H}} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{H}}^0 = \mathbf{u}_0. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Osservazione 6.2 Si osserva che lo schema (6.23) può essere utilizzato anche per risolvere problemi stazionari. La soluzione del problema stazionario è vista come la soluzione allo stato stazionario di un problema evolutivo in cui la non linearità del problema è stata ridotta mediante lo schema Eulero semiimplicito. \square

6.2.2 Tecniche di stabilizzazione

Sia δ un parametro intero che può assumere valore $0, \pm 1$ e, per ogni $\mathbf{v}_\mathcal{H} \in \mathbf{V}_\mathcal{H}$ e $q_\mathcal{H} \in Q_\mathcal{H}$ siano $\mathbf{v}_{N,k} = \mathbf{v}_\mathcal{H}|_{T_k}$, $q_{N,k} = q_\mathcal{H}|_{T_k}$. Si definisce l'operatore seguente

$$L_{k,\delta}(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{v}_{N,k}, q_{N,k}) = \delta \nu \Delta \mathbf{v}_{N,k} + (\mathbf{u}_{N,k}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_{N,k} - \nabla q_{N,k} \quad (6.25)$$

per $\delta = -1, 0, +1$ e si pone

$$L_k(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{v}_{N,k}, q_{N,k}) = L_{k,-1}(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{v}_{N,k}, -q_{N,k}). \quad (6.26)$$

La stabilizzazione del problema (6.23) secondo ([26]) consiste nel risolvere il seguente problema:

per $n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$ trovare la soluzione $(\mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1}, p_\mathcal{H}^{n+1}) \in \mathbf{V}_\mathcal{H} \times Q_\mathcal{H}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1} - \mathbf{u}_\mathcal{H}^n}{\Delta t}, \mathbf{v}_\mathcal{H} \right)_{\mathcal{H},\Omega} + a_\mathcal{H}(\mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1}, \mathbf{v}_\mathcal{H}) + c_\mathcal{H}(\mathbf{u}_\mathcal{H}^n, \mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1}, \mathbf{v}_\mathcal{H}) + b_\mathcal{H}(\mathbf{v}_\mathcal{H}, p_\mathcal{H}^{n+1}) \\ + \sum_{T_k \in \mathcal{T}_H} \left(\frac{\mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1}}{\Delta t} + L_k(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{u}_{N,k}^{n+1}, p_{N,k}^{n+1}), \tau_k(\mathbf{x}) L_{k,\delta}(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{v}_{N,k}, q_{N,k}) \right)_{N,T_k} \\ + \gamma_k (\nabla \cdot \mathbf{u}_\mathcal{H}^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_\mathcal{H})_{\mathcal{H},\Omega} \\ = \mathcal{F}_\mathcal{H}^{n+1}(\mathbf{v}_\mathcal{H}) + \sum_{T_k \in \mathcal{T}_H} \left(\frac{\mathbf{u}_\mathcal{H}^n}{\Delta t} + \mathbf{f}^{n+1}, \tau_k(\mathbf{x}) L_{k,\delta}(\mathbf{u}_{N,k}^n, \mathbf{v}_{N,k}, q_{N,k}) \right)_{N,T_k} \\ \forall \mathbf{v}_\mathcal{H} \in \mathbf{V}_\mathcal{H}, \forall q_\mathcal{H} \in Q_\mathcal{H} \\ \mathbf{u}_\mathcal{H}^0 = \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

I parametri sono scelti nel modo seguente

$$\gamma_k = \lambda |\mathbf{u}_\mathcal{H}^n(\mathbf{x})|_p H_k \xi(Re(\mathbf{x})) \quad (6.28)$$

$$\tau_k(\mathbf{x}) = \frac{H_k}{2 |\mathbf{u}_\mathcal{H}^n(\mathbf{x})|_p} \xi(Re(\mathbf{x})), \quad (6.29)$$

$$Re(\mathbf{x}) = \frac{m|\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{x})|_p}{2\nu N^2}, \quad (6.30)$$

$$\xi(Re(\mathbf{x})) = \begin{cases} Re(\mathbf{x}) & \text{se } 0 \leq Re(\mathbf{x}) < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq Re(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (6.31)$$

$$|\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{x})|_p = \begin{cases} (|(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n)_1(\mathbf{x})|^p + |(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n)_2(\mathbf{x})|^p)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,2} |(\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n)_i(\mathbf{x})| & \text{se } p = \infty, \end{cases} \quad (6.32)$$

e infine

$$m \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{\tilde{C}} \right\}. \quad (6.33)$$

Come per il problema di diffusione trasporto, la costante \tilde{C} è la costante che compare nella disuguaglianza inversa per metodi spettrali.

Il parametro δ identifica i tre diversi approcci di stabilizzazione, alla stregua di quanto avviene per gli schemi introdotti per il problema di diffusione trasporto scalare (SUPG, GALS e DW). Tali schemi garantiscono stabilità e convergenza nell'approssimazione del problema (si vedano [26], [27]).

Queste tecniche sono largamente usate nell'ambito dell'approssimazione elementi finiti e vengono qui proposti per gli elementi spettrali.

6.3 Interpretazione algebrica

Nello spazio $\mathbf{V}_{\mathcal{H}}$ si considera la base dei polinomi di Lagrange di grado minore o uguale a N in ogni direzione:

$$\beta_{\mathcal{H}} = \{\varphi_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{V} : \varphi_i|_{T_k} \in [\mathbb{Q}_N(T_k)]^2, \forall T_k \in \mathcal{T}_H, i = 1, \dots, 2N_t\} \quad (6.34)$$

ed in $Q_{\mathcal{H}}$ la base

$$\beta_{\mathcal{H}} = \{\eta_l \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap Q : \eta_l|_{T_k} \in \mathbb{Q}_N(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H, l = 1, \dots, N_t\}. \quad (6.35)$$

Riscrivendo il campo di velocità e quello di pressione in funzione delle basi sopra introdotte si ha:

$$\mathbf{u}_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2N_t} u_j^n \varphi_j(\mathbf{x}), \quad p_{\mathcal{H}}^n(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_t} p_l^n \eta_l(\mathbf{x}) \quad (6.36)$$

e si pone

$$\mathbf{u}^n = [u_j^n]_{j=1}^{2N_t} \quad \mathbf{p}^n = [p_l^n]_{l=1}^{N_t} \quad \mathbf{U}^n = [\mathbf{u}^n, \mathbf{p}^n]^T. \quad (6.37)$$

Definiamo ora le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_k)_{ij} &= (\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i)_{N, T_k} & i, j &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{A}_k)_{ij} &= a_{N, k}(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) & i, j &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{C}_k(\mathbf{u}^n))_{ij} &= c_{N, k}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) & i, j &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{D}_k)_{ij} &= \gamma_k(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_j, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_i)_{N, T_k} & i, j &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{B}_k)_{lj} &= b_{N, k}(\boldsymbol{\varphi}_j, \eta_l) & j &= 1, \dots, 2N_t, \\ & & l &= 1, \dots, N_t \\ (\mathbf{L}_{1k}(\mathbf{u}^n))_{ij} &= \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_j}{\Delta t} - \nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_j + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j, \right. & & \\ & \quad \left. \tau_k(\mathbf{x})(\delta \nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_i + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_i) \right)_{N, T_k} & i, j &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{L}_{2k})_{lm} &= (\nabla \eta_m, -\tau_k(\mathbf{x}) \nabla \eta_l)_{N, T_k} & l, m &= 1, \dots, N_t \\ (\mathbf{L}_{3k}(\mathbf{u}^n))_{lj} &= (-\nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_j + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j, -\tau_k(\mathbf{x}) \nabla \eta_l)_{N, T_k} & j &= 1, \dots, 2N_t, \\ & & l &= 1, \dots, N_t \\ (\mathbf{L}_{4k}(\mathbf{u}^n))_{im} &= (\nabla \eta_m, \tau_k(\mathbf{x})(\delta \nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_i + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_i))_{N, T_k} & i &= 1, \dots, 2N_t, \\ & & m &= 1, \dots, N_t \end{aligned} \quad (6.38)$$

ed i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_k^{1n})_i &= \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{f}^{n+1}, \tau_k(\mathbf{x})(\delta \nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_i + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_i) \right)_{N, T_k} \\ & \quad + (\mathbf{f}^{n+1}, \boldsymbol{\varphi}_i)_{N, T_k} + (\mathbf{h}^{n+1}, \boldsymbol{\varphi}_i)_{N, \partial T_k \cap \partial \Omega_N} & i &= 1, \dots, 2N_t \\ (\mathbf{f}_k^{2n})_l &= \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{f}^{n+1}, -\tau_k(\mathbf{x}) \nabla \eta_l \right)_{N, T_k} & l &= 1, \dots, N_t \end{aligned} \quad (6.39)$$

A questo punto si definiscono le matrici

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^n &= \sum_{k=1}^{Ne} R_k^T [M_k + A_k + C_k(\mathbf{u}^n) + D_k + L_{1k}(\mathbf{u}^n)] R_k & (2N_t, 2N_t) \\
\tilde{B}^n &= \sum_{k=1}^{Ne} R_k^T [B_k + L_{3k}(\mathbf{u}^n)] E_k & (2N_t, N_t) \\
\tilde{C}^n &= \sum_{k=1}^{Ne} E_k^T [B_k^T + L_{4k}(\mathbf{u}^n)] R_k & (N_t, 2N_t) \\
\tilde{D} &= \sum_{k=1}^{Ne} E_k^T L_{2k} E_k & (N_t, N_t) \\
\mathbf{f}^{1(n+1)} &= \sum_{k=1}^{Ne} R_k^T \mathbf{f}_k^{1(n+1)} & (2N_t, 1) \\
\mathbf{f}^{2(n+1)} &= \sum_{k=1}^{Ne} E_k^T \mathbf{f}_k^{2(n+1)} & (N_t, 1).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Le matrici R_k e E_k sono matrici cosiddette di *restrizione* e permettono di passare dalla numerazione globale alla numerazione locale. Esse sono così definite:

$$(R_k x)_i = \begin{cases} x_i & \text{se } (\text{supp}(\varphi_i) \cap T_k) \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2(N+1)^2 \tag{6.41}$$

e

$$(E_k x)_l = \begin{cases} x_l & \text{se } (\text{supp}(\eta_l) \cap T_k) \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad l = 1, \dots, (N+1)^2. \tag{6.42}$$

Le loro trasposte R_k^T e E_k^T sono matrici di *estensione* e permettono di passare dalla numerazione locale alla numerazione globale e dei vettori e delle matrici.

Risolvere il sistema (6.27) significa risolvere ad ogni passo temporale t_n un sistema matriciale come il seguente:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}^n & \tilde{B}^n \\ \hline \tilde{C}^n & \tilde{D} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{1(n+1)} \\ \mathbf{f}^{2(n+1)} \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

a patto di aver sostituito in $\tilde{\mathbf{A}}^n$ le righe associate alle funzioni di base φ_i , con $\mathbf{x}_i \in \partial\Omega_D$, con le righe della matrice identità di dimensione $3N_t$ e gli elementi corrispondenti del termine noto con il dato al bordo assegnato.

Posto

$$\mathcal{A}^n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}^n & \tilde{\mathbf{B}}^n \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}^n & \tilde{\mathbf{D}}^n \end{array} \right] \quad (6.44)$$

e

$$\mathbf{F}^{n+1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}^{1(n+1)} \\ \mathbf{f}^{2(n+1)} \end{array} \right], \quad (6.45)$$

il sistema (6.43) assume la forma compatta

$$\mathcal{A}^n \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1}. \quad (6.46)$$

Osservazione 6.3 Si osservi che ad ogni livello temporale la matrice \mathcal{A}^n può essere scritta come

$$\mathcal{A}^n = \sum_{k=1}^{Ne} \mathbf{R}_k^T \mathcal{A}_k^n \mathbf{R}_k \quad (6.47)$$

dove \mathbf{R}_k è la matrice di dimensione $(3(N+1)^2, 3N_t)$

$$\mathbf{R}_k = \left[\begin{array}{cc} R_k & 0 \\ 0 & E_k \end{array} \right] \quad (6.48)$$

i cui blocchi diagonali sono le matrici R_k e E_k definite sopra, e dove

$$\mathcal{A}_k^n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_k^n & \tilde{\mathbf{B}}_k^n \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_k^n & \tilde{\mathbf{D}}_k^n \end{array} \right] \quad (6.49)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_k^n &= \mathbf{M}_k + \mathbf{A}_k + \mathbf{C}_k(\mathbf{u}^n) + \mathbf{D}_k + \mathbf{L}_{1k}(\mathbf{u}^n) \quad k = 1, \dots, Ne \\ \tilde{\mathbf{B}}_k^n &= \mathbf{B}_k + \mathbf{L}_{3k}(\mathbf{u}^n) \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^n &= \mathbf{B}_k^T + \mathbf{L}_{4k}(\mathbf{u}^n) \\ \tilde{\mathbf{D}}_k^n &= \mathbf{L}_{2k}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

□

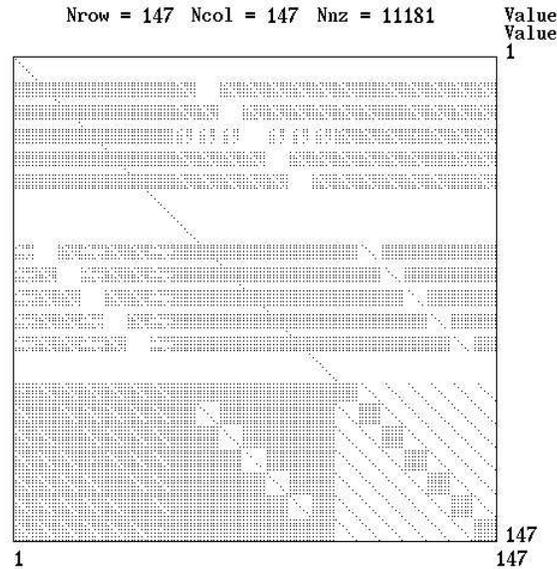


Figura 6.1: La struttura della matrice \mathcal{A}_k^n , per $N = 6$

In figura (6.1) è mostrata la struttura della matrice \mathcal{A}_k^n (6.49) relativa ad elemento spettrale con $N = 6$.

In figura (6.2) è mostrata la struttura della matrice globale \mathcal{A}^n relativa ad una decomposizione del dominio computazionale Ω in 4×4 elementi spettrali su ognuno dei quali è stato preso $N = 4$.

6.4 Risolutori e preconditionatori

Per risolvere il sistema lineare (6.46) è stato considerato il metodo iterativo BiCG-Stab preconditionato ([64]).

Sono stati considerati principalmente due preconditionatori di tipo differenziale. È stato svolto anche un rapido confronto di efficienza tra i preconditionatori differenziali ed un preconditionatore diagonale.

Quale preconditionatore diagonale è stata scelta la matrice D_2 definita in (1.108) costruita, ad ogni livello temporale, sulla matrice \mathcal{A}^n . Il costo di costruzione di tale preconditionatore è basso e poco costosa risulta anche la risoluzione del sistema sul preconditionatore. Tuttavia esso non è in grado di abbattere in maniera significativa il numero di condizionamento della matrice \mathcal{A}^n e questo implica che il BiCGStab

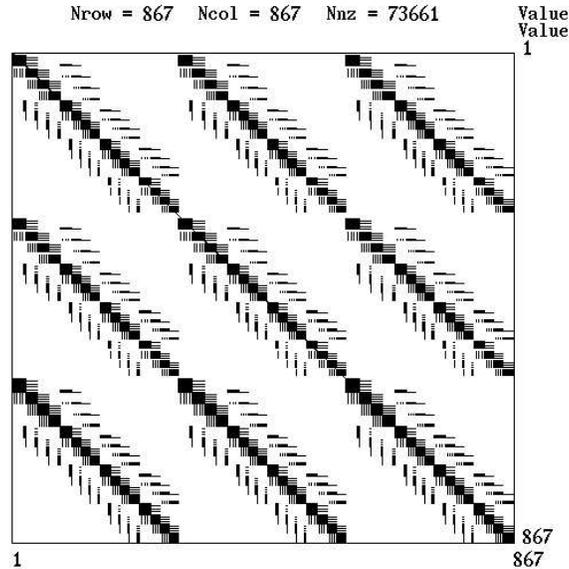


Figura 6.2: La struttura della matrice \mathcal{A}^n , relativa ad una decomposizione del dominio computazionale Ω in 4×4 elementi spettrali su ognuno dei quali è stato preso $N = 4$.

converga molto lentamente alla soluzione del sistema lineare.

Inoltre, nel momento in cui si limita il numero di iterazioni dell'algoritmo BiCG-Stab e la scelta del preconditionatore diagonale conduce, nell'arco delle iterazioni disponibili, ad una soluzione con un errore sul residuo del BiCGStab che è minore della precisione fissata sullo schema Eulero semiimplicito, lo schema Eulero semiimplicito non giunge a convergenza nella determinazione della soluzione del problema assegnato.

I due preconditionatori differenziali utilizzati si basano sulla discretizzazione mediante elementi spettrali bilineari del problema (6.12) con un metodo di tipo Schwarz e con un metodo di decomposizione di domini in cui non si considera sovrapposizione.

6.4.1 Il preconditionatore basato sul metodo di Schwarz

Seguendo lo schema del capitolo 5 si considerano la mesh $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ (5.12), costituita da tutti i nodi LGL appartenenti agli elementi spettrali della decomposizione \mathcal{T}_H , e la mesh

$$\mathcal{M}_0 = \{\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}_\mathcal{H} : \mathbf{x}_i \text{ è vertice di almeno un elemento } T_k \in \mathcal{T}_H\}. \quad (6.51)$$

La prima mesh viene denominata *mesh fine* ed induce la decomposizione \mathcal{Q}_h , mentre la seconda è detta *mesh rada* (o *coarse*) ed induce la decomposizione \mathcal{T}_H .

Quindi si considerano le basi seguenti

$$\beta_h = \{\psi_i^h \in [\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})]^2 \cap \mathbf{V} : \psi_i^h|_{Q_k} \in \mathbb{Q}_1(Q_k), \forall Q_k \in \mathcal{Q}_h, i = 1, \dots, 2N_t\} \quad (6.52)$$

e

$$\beta_0 = \{\psi_i^0 \in [\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})]^2 \cap \mathbf{V} : \psi_i^0|_{T_k} \in \mathbb{Q}_1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_H, i = 1, \dots, 2N_t\}. \quad (6.53)$$

Analogamente vengono definite le basi β_h e β_0 nello spazio delle pressioni.

Si considera l'estensione T_k^e degli elementi $T_k \in \mathcal{T}_H$ e sia βH l'ampiezza della sovrapposizione tra un elemento T_k^e ed il suo adiacente. Si ha:

$$T_k^e = \mathcal{M}_N^k \cup \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \setminus T_k : d(\mathbf{x}, T_k) \leq \beta H\}. \quad (6.54)$$

Sia N_k il numero di nodi LGL in T_k^e e siano $R_{k,e}$ e $E_{k,e}$ le matrici di restrizione da T_k^e a Ω definite in maniera analoga a (6.41) e (6.42). Per $k = 1, \dots, N_e$ si definisce la matrice $\mathbf{R}_{k,e}$ di dimensione $(3N_k, 3N_t)$:

$$\mathbf{R}_{k,e} = \begin{bmatrix} R_{k,e} & 0 \\ 0 & E_{k,e} \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Quindi, denotando con R_0 la matrice di passaggio dalla base $\beta_{\mathcal{H}}$ alla base β_0 , matrice di dimensione $(2N_0, 2N_t)$ e con E_0 la matrice di passaggio dalla base $\beta_{\mathcal{H}}$ alla base β_0 , di dimensione (N_0, N_t) , si definisce la matrice \mathbf{R}_0 di dimensione $(3N_0, 3N_t)$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

In maniera analoga a come è stato fatto nel capitolo precedente si definisce la matrice \mathcal{A}_0^n di dimensione $3N_0$, discretizzazione del problema (6.27) al tempo t^n sulla mesh rada con elementi spettrali bilineari:

$$\mathcal{A}_0^n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_0^n & \tilde{B}_0^n \\ \hline \tilde{C}_0^n & \tilde{D}_0^n \end{array} \right], \quad (6.57)$$

dove le matrici \tilde{A}_0^n , \tilde{B}_0^n , \tilde{C}_0^n e \tilde{D}_0^n sono costruite in maniera analoga alle matrici definite in (6.38) considerando le basi β_0 e β_0 invece che le basi $\beta_{\mathcal{H}}$ e $\beta_{\mathcal{H}}$.

Quindi per $k = 1, \dots, Ne$ si definiscono le matrici $\mathcal{A}_{k,e}^n$ di dimensione $3N_k$ ottenute dalla discretizzazione dello stesso problema sugli elementi estesi T_k^e mediante elementi spettrali bilineari definiti sulla mesh fine:

$$\mathcal{A}_{k,e}^n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_{k,e}^n & \tilde{\mathbf{B}}_{k,e}^n \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_{k,e}^n & \tilde{\mathbf{D}}_{k,e}^n \end{array} \right]. \quad (6.58)$$

In questo caso le matrici $\tilde{\mathbf{A}}_{k,e}^n$, $\tilde{\mathbf{B}}_{k,e}^n$, $\tilde{\mathbf{C}}_{k,e}^n$ e $\tilde{\mathbf{D}}_{k,e}^n$ sono state costruite sulle funzioni delle basi β_h e β_h .

In analogia a come è stato definito il preconditionatore di Schwarz per un problema ellittico autoaggiunto, si definisce il *preconditionatore Schwarz additivo* per il sistema (6.46) nel modo seguente:

$$(P_{as}^n)^{-1} = \mathbf{R}_0^T (\mathcal{A}_0^n)^{-1} \mathbf{R}_0 + \sum_{k=1}^{Ne} \mathbf{R}_{k,e}^T (\mathcal{A}_{k,e}^n)^{-1} \mathbf{R}_{k,e}. \quad (6.59)$$

La matrice \mathcal{A}_0^n è stata completata con condizioni di tipo Dirichlet omogeneo su tutto il bordo $\partial\Omega$ per le componenti del campo di velocità, mentre la pressione è stata fissata in un nodo della mesh rada, in particolare lo stesso nodo utilizzato per fissare la pressione nella discretizzazione elementi spettrali di grado N .

Per quanto riguarda le matrici $\mathcal{A}_{k,e}^n$ esse sono state completate con condizioni al bordo di tipo Dirichlet omogeneo sui tratti di frontiera ∂T_k^e interni al dominio computazionale Ω e con le condizioni oroginarie sulla frontiera $\partial\Omega$. Anche in questo caso la pressione è stata fissata nel medesimo nodo in cui è stata fissata nella discretizzazione elementi spettrali di grado N .

Nelle tabelle (6.1) e (6.2) è riportato il numero di iterazioni richieste dall'algoritmo BiCGStab preconditionato con il preconditionatore P_{as} per giungere alla precisione fissata $\varepsilon = 10^{-10}$. Si è considerato il problema (6.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$ con $\nu = .01$ nell'intervallo temporale $(0, .001)$, la cui soluzione esatta è la soluzione di Kim and Moin seguente:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\cos(\alpha\pi x) \sin(\alpha\pi y) e^{(-2\alpha^2\pi^2 t\nu)} \\ v(x, y) &= \sin(\alpha\pi x) \cos(\alpha\pi y) e^{(-2\alpha^2\pi^2 t\nu)} \\ p(x, y) &= -\frac{1}{4} [\cos(2\alpha\pi x) + \cos(2\alpha\pi y)] e^{(-4\alpha^2\pi^2 t\nu)} \end{aligned} \quad (6.60)$$

con $\alpha = 2$. Per la risoluzione in tempo è stato considerato lo schema Eulero semi-implicito con $\Delta t = .001$.

N	M						
	2	3	4	5	6	7	8
4	59	70	108	115	154	133	142
5	54	119	186	254	311	379	413
6	59	135	173	213	234	276	237
7	83	138	196	244	302	439	/
8	79	164	234	282	319	/	/

Tabella 6.1: Numero di iterazioni richieste dal BiCGStab preconditionato con la matrice P_{as} , con un punto di sovrapposizione, per giungere alla precisione $\varepsilon = 10^{-10}$ sulla soluzione di Kim and Moin. Dove è segnato il simbolo / non è stata eseguita la computazione per carenza di memoria di lavoro.

N	M						
	2	3	4	5	6	7	8
4	45	79	137	108	195	151	133
5	52	64	114	156	303	323	/
6	53	77	112	163	197	/	/
7	62	105	163	289	/	/	/
8	70	109	173	/	/	/	/

Tabella 6.2: Numero di iterazioni richieste dal BiCGStab preconditionato con la matrice P_{as} , con due punti di sovrapposizione, per giungere alla precisione $\varepsilon = 10^{-10}$ sulla soluzione di Kim and Moin. Dove è segnato il simbolo / non è stata eseguita la computazione per carenza di memoria di lavoro.

Il dominio computazionale Ω è stato partizionato in $M \times M$ elementi quadrati uguali su ognuno dei quali è stata considerata un'approssimazione spettrale di grado N .

N	M						
	2	3	4	5	6	7	8
4	32	52	70	89	117	151	185
5	38	62	85	120	164	221	279
6	40	77	99	153	224	359	370
7	45	85	113	178	256	329	474
8	53	106	147	200	272	406	/

Tabella 6.3: Numero di iterazioni richieste al BiCGStab preconditionato con la matrice P_{loc} per giungere alla precisione $\varepsilon = 10^{-10}$ sulla soluzione di Kim and Moin. Dove è segnato il simbolo / non è stata eseguita la computazione per carenza di memoria di lavoro.

6.4.2 Il preconditionatore senza sovrapposizione

Accanto al preconditionatore di tipo Schwarz additivo si propone il seguente preconditionatore:

$$(P_{loc}^n)^{-1} = \sum_{k=1}^{Ne} \mathbf{R}_k (\mathcal{A}_{k,h}^n)^{-1} \mathbf{R}_k^T. \quad (6.61)$$

Per $k = 1, \dots, Ne$ la matrice \mathbf{R}_k è la matrice di restrizione introdotta nel paragrafo precedente (6.48), mentre la matrice $\mathcal{A}_{k,h}^n$ è la matrice ottenuta dalla discretizzazione del problema (6.12) ristretto a T_k , con elementi spettrali bilineari sui nodi della mesh \mathcal{M}_N^k .

Le matrici $\mathcal{A}_{k,h}^n$ sono state completate con una condizione di tipo “no-friction” sui tratti di frontiera ∂T_k interni a Ω , ovvero è stato imposto

$$\tilde{T} \mathbf{n} = -p \mathbf{n} + \nu (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial T_k \setminus \partial \Omega. \quad (6.62)$$

Non è stata imposta alcuna condizione sulla pressione.

In tabella (6.3) è mostrato il numero di iterazioni richieste dall’algoritmo BiCGStab preconditionato con il preconditionatore P_{loc} per giungere alla precisione fissata $\varepsilon = 10^{-10}$. Si è considerato il problema (6.1) definito su $\Omega = (0, 1)^2$ con $\nu = .01$ nell’intervallo temporale $(0, .001)$, la cui soluzione esatta è la soluzione di Kim and Moin.

Si osserva che il numero di iterazioni dipende linearmente dal grado N di approssimazione spettrale e quadraticamente dal numero M di elementi fissati lungo ogni direzione.

Un confronto con il preconditionatore P_{as} mostra una buona efficienza del preconditionatore P_{loc} nell'ambito della risoluzione del sistema associato alle equazioni di Navier-Stokes.

Il numero di iterazioni richieste dal risolutore con il preconditionatore P_{loc} è minore rispetto al numero di iterazioni richieste nel caso del preconditionatore P_{as} .

Inoltre si osserva che, essendo le matrici $\mathcal{A}_{k,e}^n$ “estese” (ovvero di dimensione maggiore) rispetto alle matrici $\mathcal{A}_{k,h}^n$, per ogni iterazione del BiCGStab il numero di operazioni floating point richieste per la risoluzione di un sistema del tipo $P_{as}s = t$ risulta essere maggiore del numero di operazioni floating point richieste per la risoluzione di un sistema del tipo $P_{loc}s = t$. In particolare, maggiore è la sovrapposizione tra gli elementi è maggiore risulta la differenza di costo computazionale tra i due approcci.

6.5 Risultati numerici

In questa sezione vengono presentati i risultati numerici ottenuti su diversi casi test. In tutti i casi proposti i sistemi lineari sono stati risolti con l'algoritmo BiCGStab preconditionato con la matrice P_{loc} presentata nel precedente paragrafo.

Anzitutto è mostrata l'accuratezza relativi agli schemi di approssimazione utilizzati, sia per la discretizzazione spaziale che per quella temporale. È stato considerato il problema evolutivo (6.1) definito sul dominio $\Omega = (0, 1)^2$, la cui soluzione esatta è la soluzione di Kim and Moin (6.60) con $\alpha = 2$. È stata considerata una suddivisione del dominio computazionale in 4×4 elementi quadrati uguali, lo schema di stabilizzazione Douglas-Wang (corrispondente alla scelta $\delta = -1$) e lo schema in tempo Eulero semiimplicito (6.23). La tabella (6.4) mostra l'accuratezza spettrale degli schemi utilizzati, in questo caso è stato considerato l'intervallo temporale $(0, T) = (0, .01)$ con $\Delta t = .0001$.

La tabella (6.5) mostra invece l'accuratezza del primo ordine in Δt relativa allo schema Eulero semiimplicito. In questo caso è stata considerata un'approssimazione spettrale con $N = 5$.

Nella figura (6.3) sono mostrati il campo di velocità, le linee di flusso e le isolinee di pressione relative alla soluzione calcolata di Kim and Moin.

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H^1(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
4	.4276e-2	.1883e-1
5	.3589e-3	.3674e-2
6	.2586e-4	.3279e-3
7	.1472e-5	.8756e-4

Tabella 6.4: Accuratezza spettrale dello schema stabilizzato approssimante le equazioni di Navier-Stokes.

Δt	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{H^1(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
.001	.3305e-3	.8504e-3
.005	.1038e-2	.3755e-2
.01	.2018e-2	.7499e-2
.025	.4951e-2	.1887e-1
.05	.9707e-2	.3823e-1
.1	.2077e-1	.7808e-1
.25	.4329e-1	.2125e+0

Tabella 6.5: Accuratezza dello schema Eulero semiimplicito al tempo $T = 1$. $N = 5$.

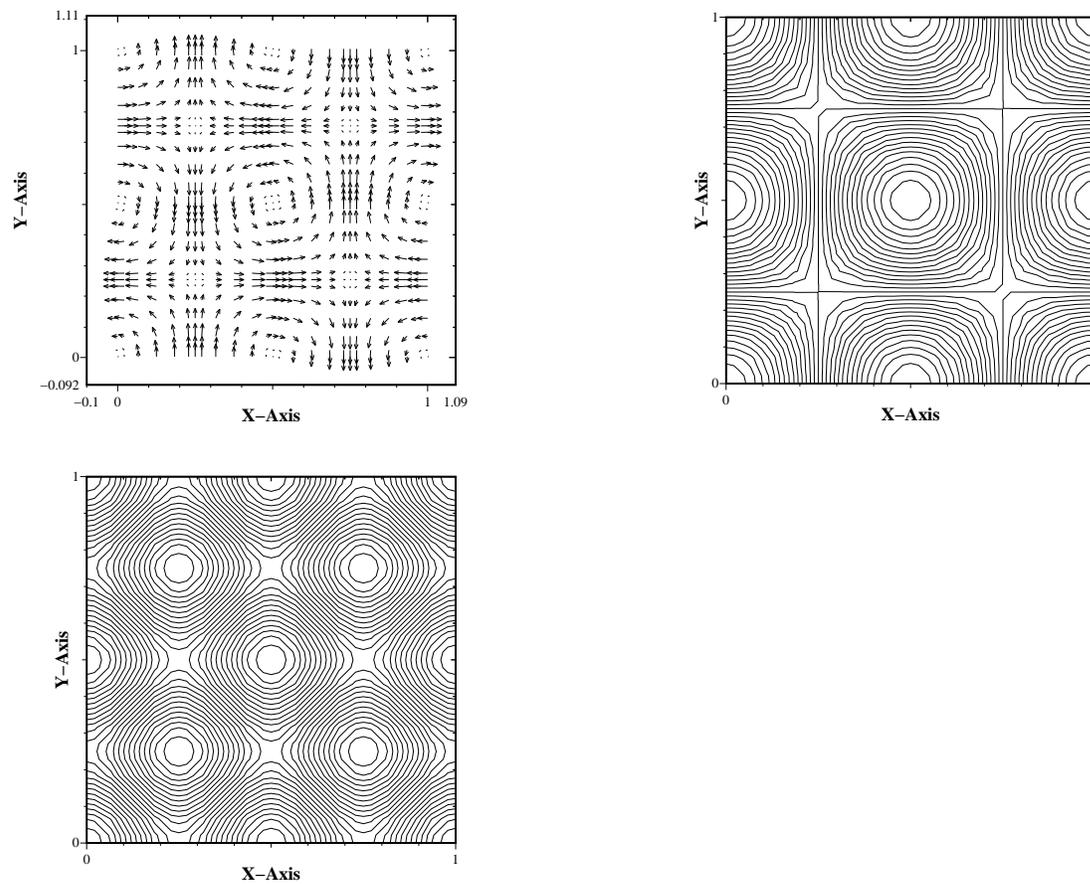


Figura 6.3: Il campo di velocità (in alto sinistra), le linee di flusso (in alto a destra) e le isolinee di pressione (in basso) associate alla soluzione di Kim and Moin per $\alpha = 2$.

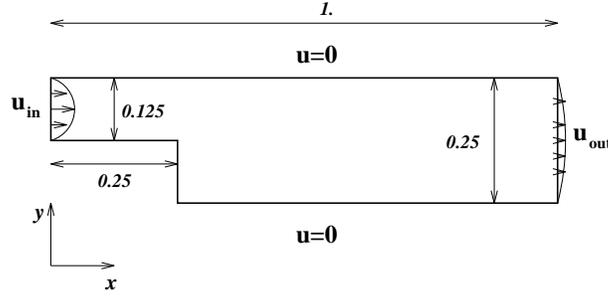


Figura 6.4: I dati del caso tesi “Flusso all’interno di un canale con gradino”.

6.5.1 Caso test: flusso all’interno di un canale con gradino

Si consideri il problema stazionario seguente:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{su } \partial\Omega_D \\ \tilde{T}\mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{su } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (6.63)$$

dove il dominio computazionale Ω è rappresentato in figura (6.4). Sono stati considerati i seguenti dati: $Re = \frac{|\mathbf{u}_{\infty}|D}{\nu} = 60$, essendo D la sezione della frontiera di inflow e \mathbf{u}_{∞} la velocità massima di inflow, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in Ω , $\partial\Omega_D \equiv \partial\Omega$ con $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ sui lati orizzontali del bordo $\partial\Omega$ e sulla parete verticale del gradino, $\mathbf{g}(x, y) = (-256y^2 + 32y - 8, 0)$ sulla frontiera di inflow e $\mathbf{g}(x, y) = (-32y^2 + 8y, 0)$ sulla frontiera di outflow.

Nella figura (6.5) e nelle successive sono mostrati: la discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame, il campo di velocità calcolato, le linee di flusso tangenti al campo vettoriale, con un ingrandimento nella zona di ricircolazione, le isolinee di pressione. I risultati ottenuti sono confrontabili con quelli contenuti in [27].

È stata considerata una decomposizione in 14 elementi rettangolari con $N = 6$ su ogni elemento. Per la risoluzione in tempo è stato considerato lo schema Eulero semiimplicito con $\Delta t = .01$ e la stabilizzazione Douglas-Wang.

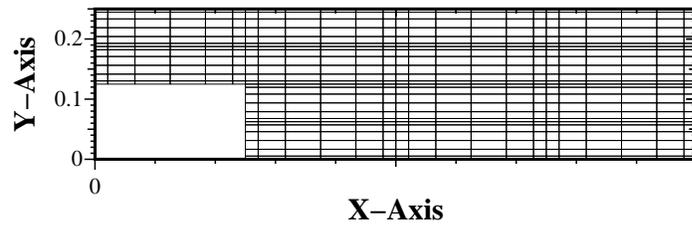


Figura 6.5: La discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame.

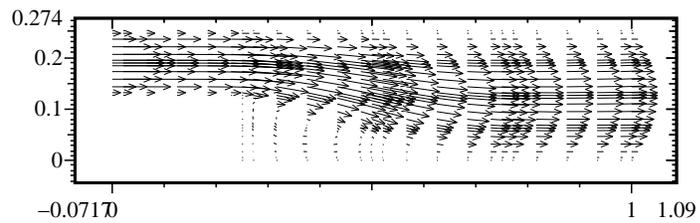


Figura 6.6: Il campo di velocità.

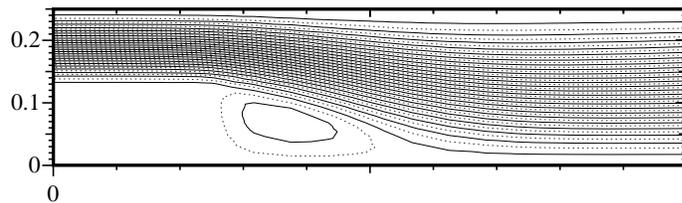


Figura 6.7: Le linee di flusso tangenti al campo di velocità.

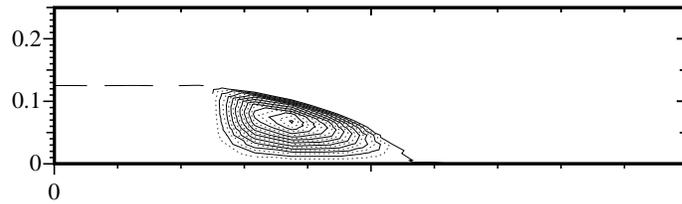
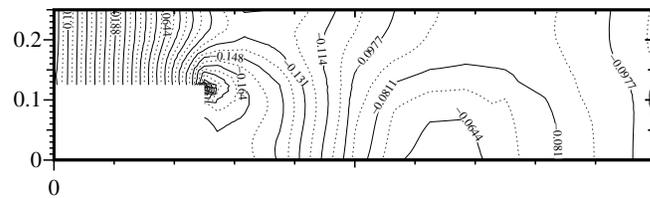


Figura 6.8: Le linee di flusso tangenti al campo di velocità relativamente alla zona di ricircolazione.



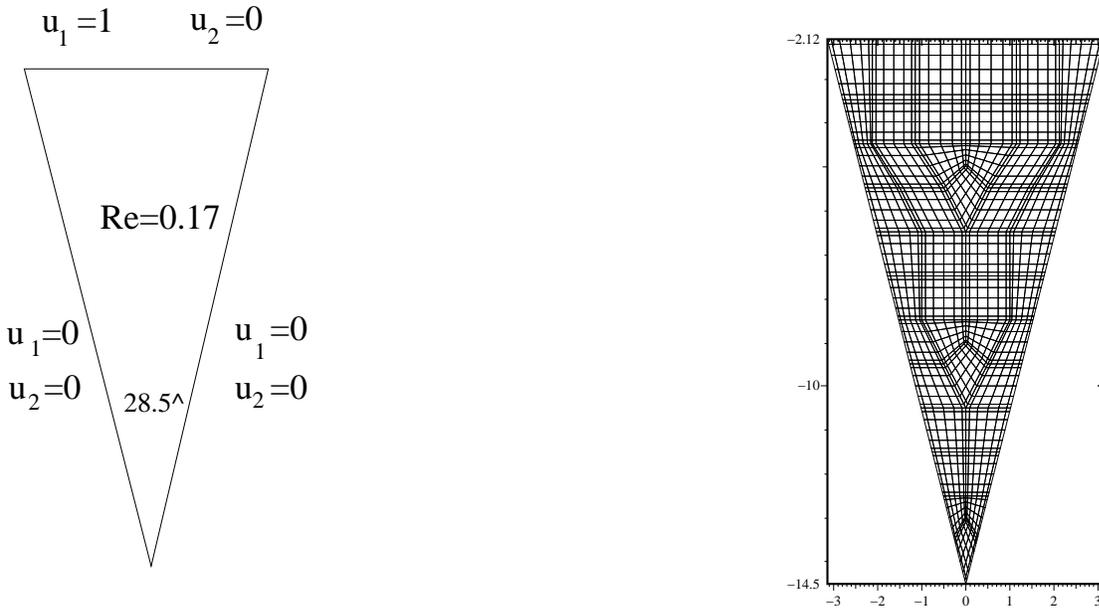


Figura 6.10: I dati del caso test “Flusso all’interno di un cuneo” (a sinistra) e la discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame (a destra).

6.5.2 Caso test: flusso all’interno di un cuneo (Taneda 1979)

Questo caso test propone la risoluzione del problema stazionario (6.27) all’interno di una cavità cuneiforme con un angolo di ampiezza 28 gradi e 5 primi.

Il dominio computazionale Ω è rappresentato in figura (6.10). Sono stati considerati i seguenti dati: $Re = \frac{|\mathbf{u}_\infty|D}{\nu} = 0.17$, essendo D la lunghezza del lato orizzontale e \mathbf{u}_∞ la velocità di inflow, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in Ω , $\partial\Omega_D \equiv \partial\Omega$ con $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ sui lati obliqui del bordo $\partial\Omega$ e $\mathbf{g}(x, y) = (1, 0)$ sulla frontiera orizzontale. È stata considerata una decomposizione in 46 elementi spettrali con grado $N = 6$ in ogni direzione su ogni elemento.

Per la risoluzione in tempo è stato considerato lo schema Eulero semiimplicito con $\Delta t = .01$ con stabilizzazione di Douglas-Wang.

Nella figura (6.11) sono mostrate le linee di flusso tangenti al campo.

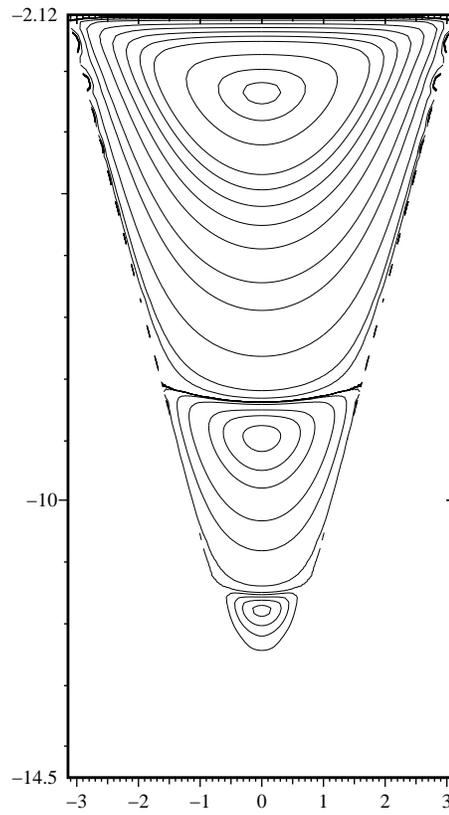


Figura 6.11: Le linee di flusso tangenti al campo di velocità.

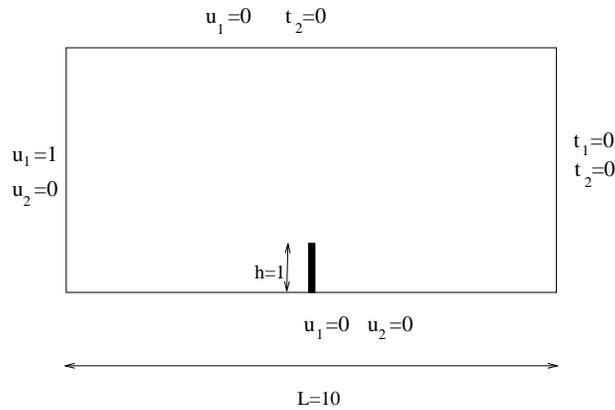


Figura 6.12: I dati del caso tesi “Flusso uniforme oltre un ostacolo.”

6.5.3 Caso test: flusso uniforme oltre un ostacolo

Questo caso test propone la risoluzione del problema stazionario (6.27) in una regione di forma rettangolare in presenza di un ostacolo.

Il dominio computazionale Ω è rappresentato in figura (6.12). Sono stati considerati i seguenti dati: $Re = \frac{|\mathbf{u}_\infty|D}{\nu} = 0.014$, essendo D la lunghezza dell’ostacolo e \mathbf{u}_∞ la velocità di inflow, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in Ω . Il dato al bordo è stato fissato come segue: sul lato basso orizzontale è stato imposto $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ sul lato alto orizzontale è stata imposta assegnata la componente orizzontale della velocità, mentre si è imposta una condizione di tipo “no-friction” per la seconda componente della velocità. Sul lato di inflow (sinistro verticale) è stato assegnato $\mathbf{g}(x, y) = (1, 0)$, mentre sul lato destro verticale si è imposta una condizione di tipo “no-friction” per entrambe le componenti della velocità.

I risultati numerici riportati mostrano la correttezza dell’imposizione delle condizioni al bordo di tipo “no-friction”. Il dominio computazionale è stato decomposto in 24 elementi con grado di discretizzazione spettrale $N = 6$ in ogni direzione su ogni elemento. È stato considerato lo schema Eulero semiimplicito per la risoluzione in tempo con $\Delta t = .01$. Lo stato stazionario è stato raggiunto in 50 passi temporali con una precisione $\varepsilon = 1.d-8$. Si è utilizzato lo schema di stabilizzazione Douglas-Wang.

Nella figura (6.13) e nella successiva sono mostrati: la discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame, le linee di flusso tangenti tangenti al campo di velocità.

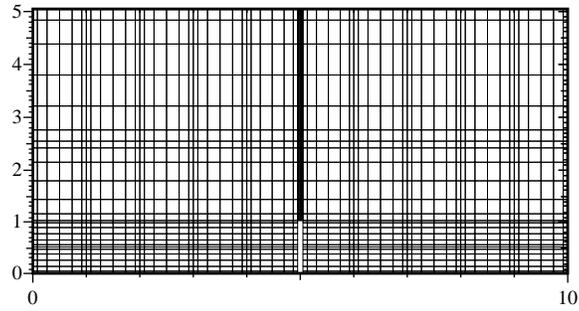


Figura 6.13: La discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame.

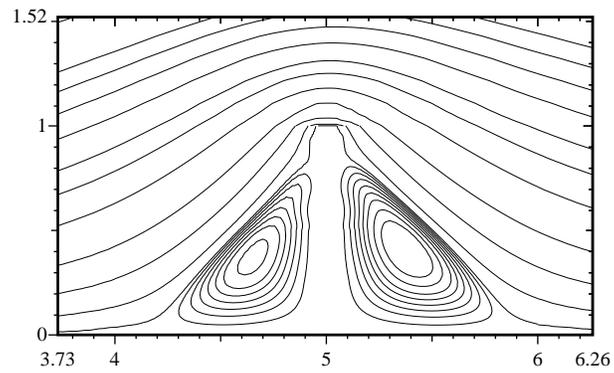


Figura 6.14: Le linee di flusso tangenti al campo di velocità.

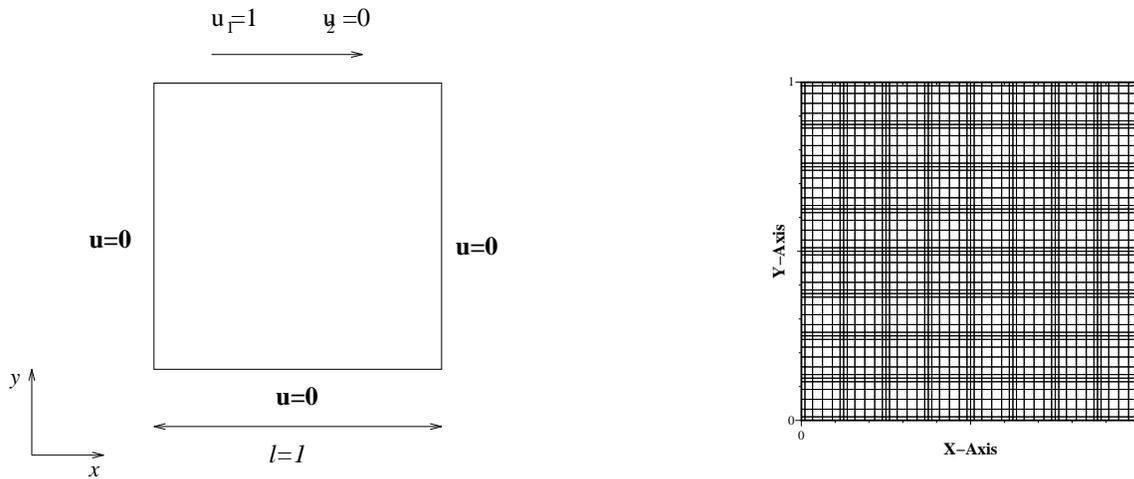


Figura 6.15: I dati del caso tesi “Flusso uniforme oltre un ostacolo” (a sinistra) e la discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale in esame (a destra).

6.5.4 Caso test: cavità trascinata

Questo caso test propone la risoluzione del problema stazionario (6.27) in una cavità di forma quadrata.

Il dominio computazionale Ω è rappresentato in figura (6.15). Sono stati considerati i seguenti dati: $Re = \frac{|\mathbf{u}_\infty|D}{\nu} = 5000$, essendo D il lato della cavità, e \mathbf{u}_∞ la velocità di inflow, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in Ω . Il dato al bordo è stato fissato $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ sulle pareti della cavità e $\mathbf{g}(x, y) = (1, 0)$ sulla frontiera di inflow.

Il dominio computazionale è stato decomposto in 64 elementi con grado di discretizzazione spettrale $N = 6$ in ogni direzione su ogni elemento. È stato considerato lo schema Eulero semiimplicito per la risoluzione in tempo con $\Delta t = .01$. Si è utilizzato lo schema di stabilizzazione Douglas-Wang.

Nella figura (6.15) è anche mostrata la discretizzazione elementi spettrali del dominio computazionale. Nella figura (6.16) e nelle successive sono mostrati: il campo vettoriale calcolato ed il campo vettoriale normalizzato in cui si possono osservare le ricircolazioni, le isolinee di pressione e la pressione.

6.5.5 Caso test: flusso oltre il cilindro circolare

Questo caso test propone lo studio del moto di un fluido oltre un ostacolo rappresentato da un cilindro circolare ([59], [8]). Tale problema è periodico in natura

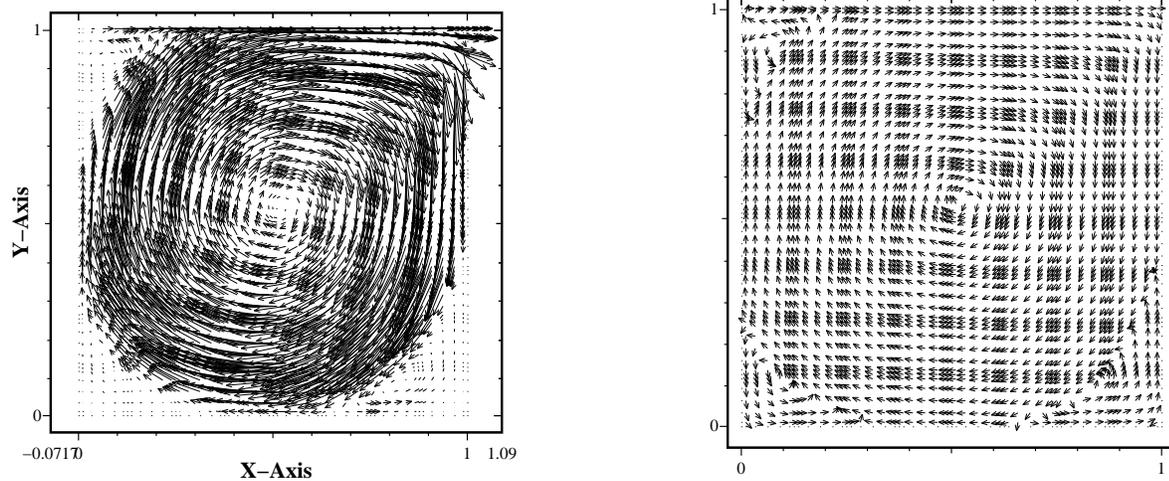


Figura 6.16: Il campo di velocità (a sinistra) ed il campo di velocità normalizzato (a destra).

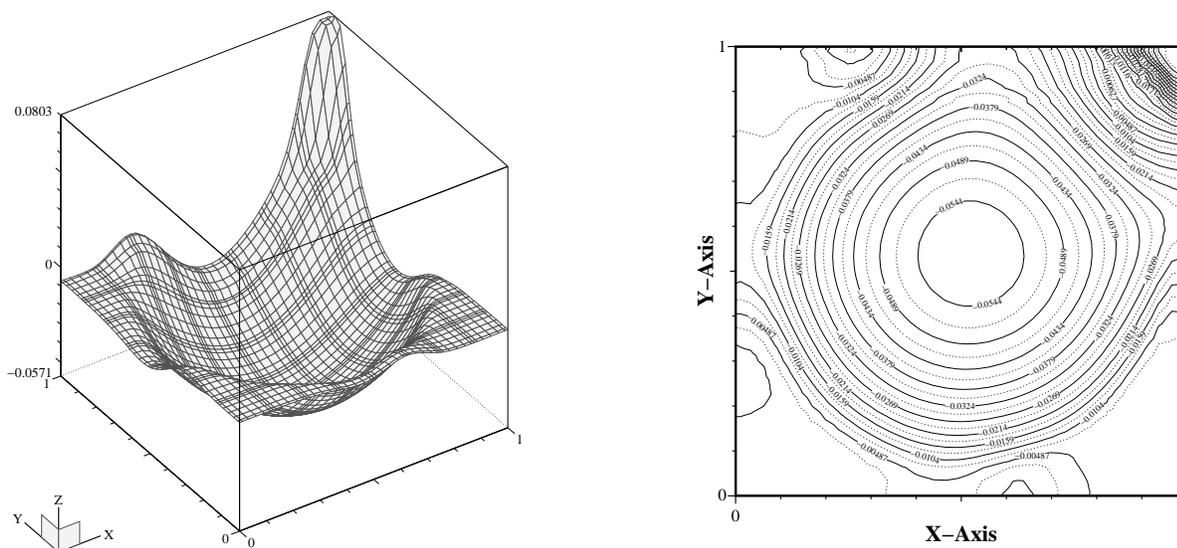


Figura 6.17: La pressione e le isolinee di pressione.

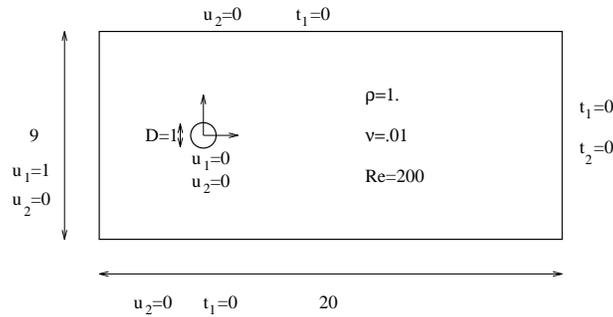


Figura 6.18: La geometria ed i dati del problema “Flusso oltre un cilindro circolare”.

ed è richiesta una buona accuratezza numerica al fine di catturare i vari fenomeni presenti nel sistema ([59]). Per la risoluzione di tale problema sono stati considerati gli schemi già utilizzati nei precedenti casi test, ovvero lo schema Eulero semiimplicito del primo ordine in tempo, elementi spettrali di grado 6 per la discretizzazione spaziale, stabilizzati con lo schema Douglas Wang.

I dati del problema sono presentati in figura (6.18), come per il caso test del flusso oltre un ostacolo, su alcuni bordi del dominio computazionale è imposta una condizione di tipo “no-friction” per le componenti della velocità. Si è considerato $Re = \frac{|\mathbf{u}_\infty|D}{\nu} = 100$, essendo D il diametro del cilindro, $\mathbf{u}_\infty = 1$ la velocità di deriva e $\nu = .01$. Per generare i vortici oltre il cilindro è stata considerata un’imperfezione nella geometria del problema, il dominio computazionale è stato abbassato di un 1% della lunghezza totale. Il dominio computazionale è stato suddiviso in 64 elementi su ognuno dei quali è stata considerata un’approssimazione spettrale di grado 6. Dopo circa 100 unità temporali, in cui il sistema era in uno stato transitorio, è iniziata la fase periodica del moto. È stato rilevato un periodo $T = 5.6$ corrispondente ad un *Numero di Strouhal* uguale a $St = 0.178$. Il *Numero di Strouhal* viene definito come $St = D/(|\mathbf{u}_\infty|T)$ ed il valore più comunemente osservato nelle sperimentazioni riportate in letteratura è $St = 0.167$ corrispondente ad un periodo $T = 6$. In figura (6.19) è mostrata la discretizzazione del dominio computazionale, nelle figure successive sono mostrate le linee tangenti al campo di velocità e le linee di campo stazionarie, ovvero le linee di flusso tangenti al campo di velocità osservato da un osservatore solidale con il fluido, in sei diversi istanti del periodo del moto.

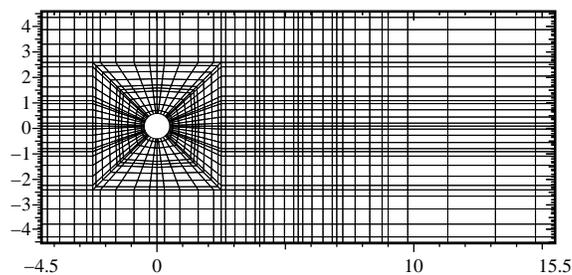


Figura 6.19: La discretizzazione del dominio computazionale.

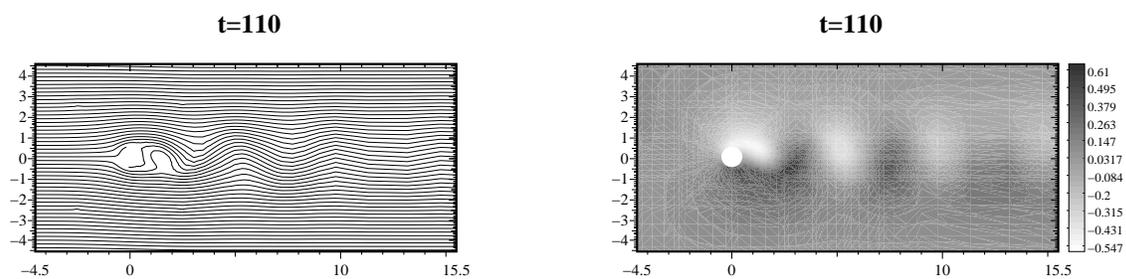


Figura 6.20: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 110$.

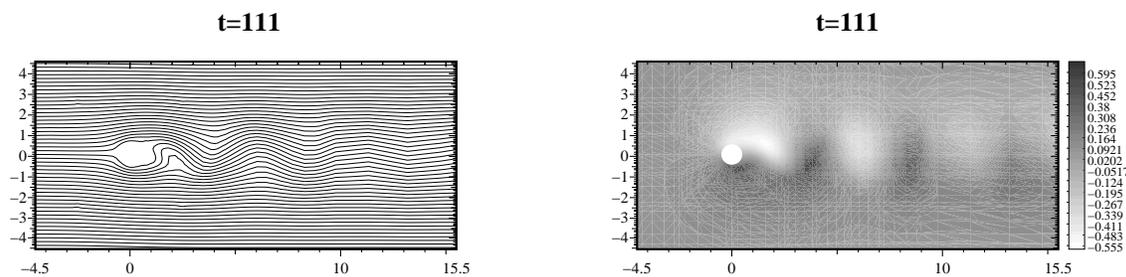


Figura 6.21: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 111$.

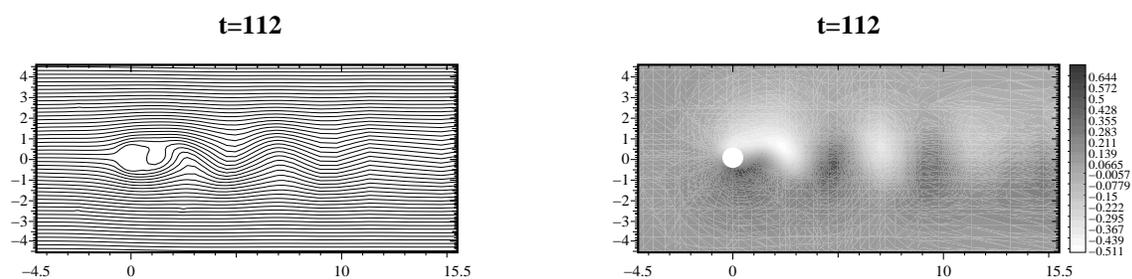


Figura 6.22: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 112$.

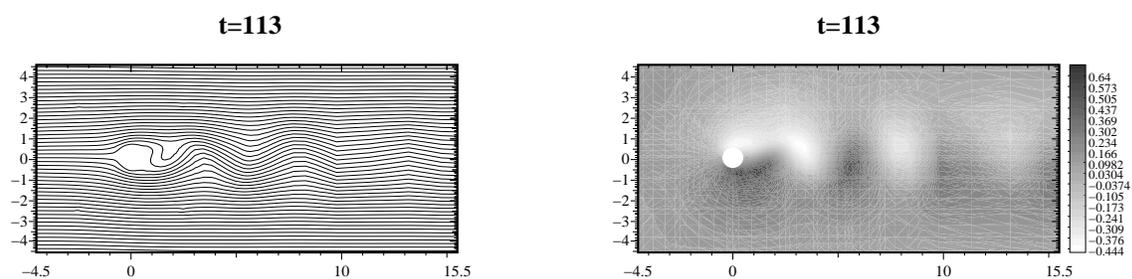


Figura 6.23: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 113$.

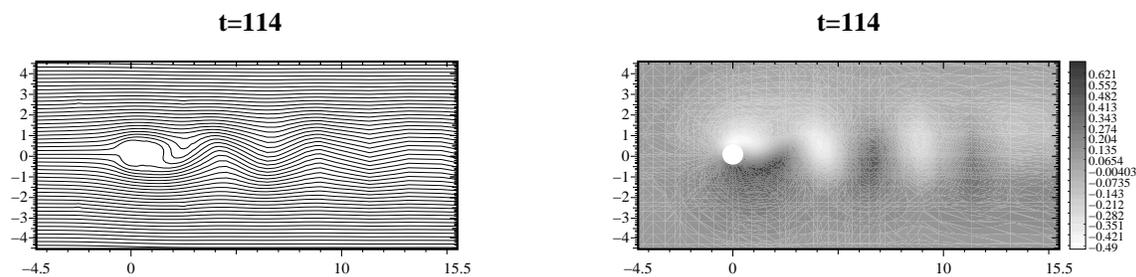


Figura 6.24: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 114$.

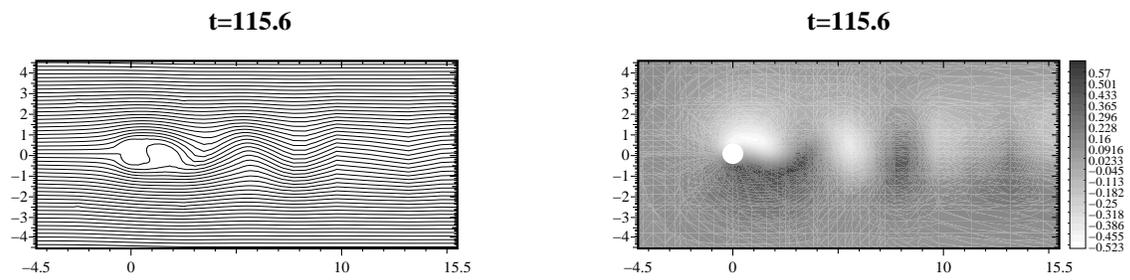


Figura 6.25: Le linee di campo (a sinistra) e le linee di campo stazionarie (a destra) per $t = 115.6$.

Bibliografia

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] V.I. Agoshkov and V.I. Lebedev. The Poincaré-Steklov's operators and the domain decomposition algorithms in variational problems. *Computational Processes and Systems*, 2:173–227, 1985. NAUKA, Moscow, (in Russian).
- [3] V.I. Agoshkov and E. Ovtchinnikov. Projection decomposition method. *Math. Models and Methods in Appl. Sci.*, 4(6):773–794, 1994.
- [4] O. Axelsson. *Iterative Methods for Linear Systems*. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [5] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations Spectrales de Problèmes aux Limites Elliptiques*. Springer Verlag, Paris, 1992.
- [6] J.F. Bourgat, R. Glowinski, P. Le Tallec, and M. Vidrascu. Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations. In J.Périaux T.F.Chan, R.Glowinski and O.B.Widlund, editors, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1989. SIAM.
- [7] F. Brezzi and G. Gilardi. Functional analysis & Functional spaces. In H. Kardestuncer, editor, *Finite Element Handbook*, chapter 1, 2. McGraw-Hill, New-York, 1987.
- [8] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows. In *Third International Conference on Finite Element Methods in Fluid Flows*, Banff, Canada, 1980.
- [9] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 32:199–259, 1982.

- [10] C. Canuto. Stabilization of spectral methods by finite element bubble functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 116:13–26, 1994.
- [11] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [12] C. Canuto and P. Pietra. Boundary and interface conditions within a finite element preconditioner for spectral methods. *J. Comput. Phys.*, 91:310–343, 1990.
- [13] C. Canuto and G. Puppo. Bubble stabilization of spectral Legendre methods for the advection-diffusion equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118:239–263, 1994.
- [14] C. Canuto and A. Quarteroni. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. *Math. Comput.*, 38:67–86, 1982.
- [15] C. Canuto and A. Quarteroni. Preconditioned minimal residual methods for Chebyshev spectral calculations. *J. Comput. Phys.*, 60:315–337, 1985.
- [16] C. Carlenzoli and P. Gervasio. Effective numerical algorithms for the solution of algebraic systems arising in spectral methods. *Applied Numerical Mathematics*, 10:87–113, 1992.
- [17] A. J. Chorin and J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1992.
- [18] A.J. Chorin. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:928–931, 1967.
- [19] A.J. Chorin. Numerical solutions of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 22:745–762, 1968.
- [20] Ph.G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In Ph.G. Ciarlet and J.-L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis, II*, pages 16–351. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [21] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, London, New York, 1984. 2nd eds.

- [22] M.O. Deville and E.H. Mund. Chebyshev pseudospectral solution of second-order elliptic equations with finite element preconditioning. *J. Comput. Phys.*, 60:517–533, 1985.
- [23] M.O. Deville and E.H. Mund. Finite element preconditioning for pseudospectral solutions of elliptic problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 11:311–342, 1990.
- [24] M. Dryja and O. Widlund. Some domain decomposition algorithms for elliptic problems. In L.Hayes and D. Kincaid, editors, *Iterative methods for large linear systems*, pages 273–291. Academic, 1989.
- [25] M. Dryja and O. Widlund. Additive Schwarz methods for elliptic finite element problems in three dimensions. In T.F.Chan, D.E. Keyes, G.A. Meurant, J.S. Scroggs, and R.G. Voigt, editors, *Fifth Conf. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1992. SIAM.
- [26] L.P. Franca and S.L. Frey. Stabilized finite element methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 99:209–233, 1992.
- [27] L.P. Franca, S.L. Frey, and T.J.R. Hughes. Stabilized finite element methods: I. Application o the Advective-Diffusive model. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 95:253–276, 1992.
- [28] D. Funaro. A multidomain spectral approximation of elliptic equations. *Num. Meth. for Partial Differential Equations*, 2:187, 1986.
- [29] E. Gagliardo. Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 27:284–305, 1957.
- [30] G. N. Gatica and G.C. Hsiao. On the coupled BEM and FEM for a nonlinear exterior Dirichlet problem in \mathbf{r}^2 . *Numer. Math.*, 61(2):171–214, 1992.
- [31] P. Gervasio, E.I. Ovtchinnikov, and A. Quarteroni. The spectral projection decomposition method for elliptic equations in two dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(4):1616–1639, 1997.
- [32] P. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

- [33] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [34] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computation*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [35] G.H. Golub and G.A. Meurant. *Résolution Numérique des Grands Systèmes Linéaires*. Eyrolles, Paris, 1983.
- [36] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. Am. Math. Soc., Providence, 1957.
- [37] Jr. J. Douglas and J. Wang. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem. *Math. Comput.*, 52:495–508, 1989.
- [38] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [39] C. Johnson and U. Navert. An analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems. In L.S.Frank O.Axelsson and A.Van Der Slu-ids, editors, *Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, pages 99–116. North-Holland, 1981.
- [40] C. Johnson, U. Navert, and J. Pitkaranta. Finite element methods for linear hyperbolic problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 45:285–312, 1984.
- [41] C. Johnson and J. Saranen. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 47:1–18, 1986.
- [42] C. Johnson, A. Szepessy, and P. Hansbo. On the convergence of shock-capturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws. *Math. Comput.*, 54:107–129, 1990.
- [43] J. L. Lions and E. Magenes. *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [44] Y. Maday, D. Meiron, A.T. Patera, and E.H. Rønquist. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: application to spectral element discretizations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14:310–337, 1993.

- [45] Y. Maday and A.T. Patera. Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. In *State-of-the-Art Surveys on Computational Mechanics*. A.K. Noor and J. T. Oden, 1989.
- [46] Y. Maday, A.T. Patera, and E.H. Rønquist. An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: application to incompressible fluid flow. *J. Sci. Comput.*, 5:263–292, 1990.
- [47] G.I. Marchuk. Splitting and Alternating Direction Methods. In P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 1, pages 197–462. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), 1990.
- [48] L.D. Marini and A. Quarteroni. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numer.Math.*, 55:575–598, 1989.
- [49] R. Glowinski M.O. Bristeau and J. Périaux. Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Application to the simulation of compressible and incompressible viscous flows. *Comput. Phys. Rep.*, 6:73–187, 1987.
- [50] S.A. Orszag. Spectral methods for problem in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 37:70–92, 1980.
- [51] E. Ovtchinnikov. The construction of a well-conditioned basis for the projection decomposition method. *CALCOLO*, 30(3):255–271, 1993.
- [52] F. Pasquarelli and A. Quarteroni. Effective spectral approximations to convection-diffusion equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 116:39–51, 1994.
- [53] D.W. Peaceman and Jr. H.H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. SIAM*, 3:28–41, 1955.
- [54] A. Quarteroni and G. Sacchi Landriani. Domain decomposition preconditioners for the spectral collocation methods. *J. Sci. Comput.*, 3:45–75, (1988).
- [55] A. Quarteroni and G. Sacchi Landriani. Parallel algorithms for the capacitance matrix method in domain decompositions. *Calcolo*, 25(1-2):75–102, (1988).
- [56] A. Quarteroni and A. Valli. Theory and application of Steklov-Poincaré operators for boundary-value problems. In R. Spigler, editor, *Applied and Industrial Mathematics*, pages 179–203, Kluwer Academic Publisher, Dordest, 1991.

- [57] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Verlag, Heidelberg, 1994.
- [58] A. Quarteroni and E. Zanghieri. Finite element preconditioning for Legendre spectral collocation approximation to elliptic equations and systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:917–936, 1992.
- [59] J.C. Simo and F. Armero. Unconditional stability and long-term behaviour of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 111:111–154, 1992.
- [60] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode de pas fractionnaires (II). *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 33:377–385, 1969.
- [61] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, volume 41 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983.
- [62] L.P. Franca T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 59:85–99, 1989.
- [63] M.Mallet T.J.R. Hughes and A.Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 54:341–355, 1986.
- [64] H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13(2):631–644, 1992.
- [65] G.N. Yakovlev. On traces of functions from Sobolev spaces on piecewise-smooth surfaces. *Mathem. Coll.*, 74(4):526–542, 1967. (In Russian).