DICACIM programme A.Y. 2019–20
Numerical Methods for Partial Differential Equations

Lab 1
Numerical solution of 1D elliptic problems with Finite Elements and MATLAB

Paola Gervasio

DICATAM, Università degli Studi di Brescia (Italy)

uniBS, April, 2020

Scaricare il file FEM1d.zip dalla pagina del corso moodle.
Contiene:

- `fem_1d_solver.m` : risolve un problema ellittico 1d con FEM lineari o quadratici;
- `fem_1d_errors.m`: calcola gli errori tra la soluzione numerica e la soluzione esatta nelle norme in H^1 e L^2;
- `fem_1d_setting.m`: costruisce i nodi e i pesi di quadratura per calcolare gli integrali, valuta le funzioni di base nei nodi di quadratura, calcola l'ampiezza degli elementi della partizione. È richiamata all'interno delle due function precendenti;
- `xwlg.m`: function per calcolare i nodi e i pesi delle formule di quadratura di Gauss Legendre (i nodi sono interni all'intervallo). È richiamata all'interno di `fem_1d_setting.m`;
- `xwlgl.m`: function per calcolare i nodi e i pesi delle formule di quadratura di Gauss Legendre Lobatto (gli estremi dell'intervallo sono 2 nodi di quadratura). È richiamata all'interno di `fem_1d_setting.m`.

fem_1d_solver.m

```
>> help fem_1d_solver

fem_1d_solver: solve -mu*u''+sigma u=f in Omega
with Dirichlet and/or Neumann boundary conditions
by either P1-fem or P2-fem on a uniform grid.

[nodes,uh]=fem_1d_solver(geom,problem_data,p,Ne)

Input: geom: struct with fields:
           geom.xa, geom.xb = end-points of Omega
       problem_data: struct with coefficients and ...
            ....
       p = local polynomial degree (1 or 2)
       Ne =  number of elements of the partition
Output: nodes = column array with nodes of the mesh
        uh = column array of the numerical solution
```

fem_1d_errors.m

```
>> help fem_1d_error

fem_1d_errors Computes errors for 1d b.v.p.
[errors]=fem_1d_errors(uh,geom,p,Ne,uex,u1ex,errtype)
Input:
 uh= numerical solution
 geom = struct with fields:
   geom.xa, geom.xb = end-points of Omega
 p = local polynomial degree (1 or 2)
 Ne =  number of elements of the partition
 uex =  function handle @(x) with the exact solution
 u1ex =  function handle @(x) with the derivative
           of the exact solution
optional input: errtype = 0: absolute errors (default
                errtype = 1: relative errors
Output:
  errors.h1 = ||u-uh||_H1
  errors.l2 = ||u-uh||_L2
```

Problema 1

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega = (0,1)$ e $f(x) = 9\pi^2 \sin(3\pi x) + 2$.

1. Calcolare la soluzione numerica $u_h(x)$ ottenuta con fem-$\mathbb{P}_1$ su una mesh uniforme con `Ne=5, 10, 20, 40` e rappresentarla graficamente.

2. Calcolare l'errore tra la soluzione numerica u_h e la soluzione esatta $u(x) = \sin(3\pi x) - x^2 + x$, sia in norma $H^1(\Omega)$ che in norma $L^2(\Omega)$ e verificare che, quando $h \to 0$, si ha

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \simeq h \qquad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \simeq h^2$$

3. Ripetere il lavoro con fem-$\mathbb{P}_2$, verificando che ora gli errori decrescono come h^2 e come h^3 (rispettivamente) al tendere di h a zero.

Problema 2

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -u''(x) + 10u(x) = 9e^x & \text{in } (-1,1) \\ u(-1) = 1/e, u(1) = e \end{cases}$$

Ripetere il lavoro proposto per il problema 1, sapendo che $u(x) = e^x$.

Problema 3. Trasferimento di calore in un'asta sottile

Consideriamo un'asta sottile di lunghezza L e sezione circolare di raggio r, che nell'estremo $x = 0$ abbia temperatura T_0 e che nell'estremo $x = L$ sia isolata. La temperatura T della barra in un punto $x \in (0, L)$ soddisfa il seguente problema ellittico:

$$\begin{cases} -kAT'' + \tilde{\sigma} p T = 0, & x \in (0, L), \\ T(0) = T_0, & T'(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avendo denotato con k la conducibilità termica del materiale, con $\tilde{\sigma}$ il coefficiente di scambio termico, con A e con p l'area ed il perimetro (rispettivamente) della sezione circolare.

Approssimare la soluzione del problema (1) utilizzando elementi finiti quadratici (su una griglia uniforme di `Ne=10, 20, 40, 80` elementi), qualora i dati siano: $L = 1m$, $r = 10^{-2}m$, $k = 200\frac{W}{mK}$, $\tilde{\sigma} = 2\frac{W}{m^2K}$, $T_0 = 10K$.

Dopo aver verificato che la soluzione esatta del problema è

$$T(x) = T_0 \frac{\cosh(\alpha(L - x))}{\cosh(\alpha L)},$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma} p}{kA}}$, verificare che gli errori tra soluzione esatta e soluzione numerica osservano i comportamenti previsti dalla teoria.

Problema 4. Flessione di una fune

Consideriamo una fune fissata agli estremi, avente tensione T e lunghezza L. La funzione $u(x)$, che misura lo spostamento verticale della fune quando questa è soggetta ad un carico trasversale di intesità $w(x)$, soddisfa il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -Tu'' + ku = w & \text{in } (0, L), \\ u(0) = 0, & u(L) = 0, \end{cases}$$

dove k è il coefficiente di elasticità della fune.
Calcolare l'approssimazione di u con elementi finiti $\mathbb{P}_1$ su una griglia uniforme con i seguenti dati:

1. $L = 1$, $T = 1$, $k = 1$, $w(x) \equiv 1$, `Ne=5, 10, 20, 40;`
2. $L = 1$, $T = 10^{-3}$, $k = 1$, $w(x) \equiv 1$, `Ne=5, 10, 20, 40;`
3. $L = 1$, $T = 10^{-4}$, $k = 1$, $w(x) \equiv 1$, `Ne=10, 20, 40, 80;`

Problema 4: remark

Quando $T << k$ e h non è sufficientemente piccolo, la soluzione numerica mostra delle oscillazioni che non sono fisiche, ma sono dovute dovute ad una scarsa approssimazione.
La soluzione esatta presenta due boundary layer dell'ordine di $\sqrt{T/k}$ e per catturarli correttamente è necessario che h sia sufficientemente piccolo rispetto a $\sqrt{T/k}$.
Precisamente serve:

$$h < \sqrt{6\frac{T}{k}}. \qquad (2)$$

Verificare che se h soddisfa (2), allora la soluzione numerica non presenta oscillazioni.

Problema 4: rimedio

Si possono eliminare le oscillazioni, mantenedo $h > \sqrt{6\frac{T}{k}}$, a patto di sostituire la matrice di massa M ($M_{ij} = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i$) con la **lumped mass matrix**

$$\hat{M}: \quad \hat{M}_{ij} = \delta_{ij} \sum_j M_{ij}.$$

$\hat{M}$ è una matrice diagonale, l'elemento diagonale $i-$simo è la somma degli elementi della riga $i-$sima della matrice di massa M.

prova:
aprire il file `fem_1d_solver.m` e scommentare la riga 90.

Quindi salvare il file e ricalcolare la soluzione numerica con i diversi valori di `Ne` (e quindi di h).

Problema 5: regolarità della soluzione

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (0,1), \\ u(0) = 0, & u'(1) = \pi, \end{cases}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 0.5) \\ -\pi^2 \cos(\pi(x-0.5)) & \text{se } x \in [0.5, 1) \end{cases}$$

Calcolare la soluzione numerica con fem$-\mathbb{P}_1$ e fem$-\mathbb{P}_2$ e calcolare gli errori rispetto alla soluzione esatta

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 0.5) \\ 1 - \cos(\pi(x-0.5)) & \text{se } x \in [0.5, 1) \end{cases}$$

Che regolarità ha la soluzione esatta e come si comportano gli errori al tendere di h a zero?

Prendere `Ne=11, 21, 41, 81, 161`.