DICACIM programme A.Y. 2019–20
Numerical Methods for Partial Differential Equations

Lesson 2.
Elliptic problems: strong and weak forms
Elements of functional analysis

Paola Gervasio

DICATAM, Università degli Studi di Brescia (Italy)

uniBS, April, 2020

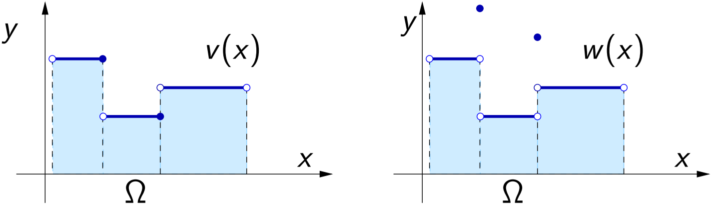
Lo spazio $L^2(\Omega)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto e limitato.

Definizione.

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega v^2 d\Omega < +\infty\}.$$

Gli elementi di $L^2(\Omega)$ sono classi di funzioni. Si identificano in una sola funzione tutte quelle funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla.



v e w differiscono solo in due punti, quindi rappresentano lo stesso elemento in $L^2(\Omega)$.

Prodotto scalare in $L^2(\Omega)$

Prodotto scalare: $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \; d\Omega$

Definizione. $(\cdot, \cdot)$ è un **prodotto scalare** su uno spazio vettoriale V se

1. $(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$ (simmetria)
2. $(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in V$ e $(u, u) = 0$ sse $u = 0$ (positività)
3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v, w \in V$ (bilinearità)

Norma in $L^2(\Omega)$

Norma: $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u^2 \, d\Omega$

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale, $\|\cdot\|$ è una **norma** su V se

1. $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0$ sse $v = 0$ (positività)
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Definizione. Un **spazio vettoriale normato** è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma.

$L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert

La **norma** $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ è **indotta dal prodotto scalare** $(u,v)_{L^2(\Omega)}$, ovvero

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{L^2(\Omega)}}$$

Definizione. Uno spazio V vettoriale è di **Hilbert** se è dotato di un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ ed è completo[1] rispetto alla norma $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ indotta dal prodotto scalare.

Proprietà. $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

In $L^2(\Omega)$ vale la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$\left| \int_\Omega uv \; d\Omega \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u,v \in L^2(\Omega)$$

[1] Uno spazio normato è **completo** se ogni successione di Cauchy è anche convergente

Lo spazio $C^0(\overline{\Omega})$ (delle funzioni continue su $\overline{\Omega}$), munito della norma $\|v\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$ è uno spazio normato completo, ma non è uno spazio di Hilbert.
Infatti la norma $\|u\|_\infty$ non è indotta da alcun prodotto scalare.

Lo spazio $C^0(\overline{\Omega})$ (delle funzioni continue su $\overline{\Omega}$), munito della norma $\|v\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$ è uno spazio normato completo, ma non è uno spazio di Hilbert.
Infatti la norma $\|u\|_\infty$ non è indotta da alcun prodotto scalare.

Obiettivo: vogliamo derivare le funzioni di $L^2(\Omega)$ anche se non sono derivabili in senso classico $\rightarrow$ introduciamo funzionali e le distribuzioni.

Funzionali

Sia V uno spazio vettoriale normato.
Un **funzionale** F definito su V è un operatore a valori reali, cioè:
$F : V \to \mathbb{R}$ (associa ad una funzione di V un unico valore in $\mathbb{R}$).

Esempio 1. $V = C^0([0,1])$, $\forall v \in V$ e per un certo $x_0 \in [0,1]$, definiamo il funzionale, detto **delta di Dirac**,

$$\delta_{x_0}(v) = \langle \delta_{x_0}, v \rangle = v(x_0).$$

Esempio 2. $V = C^0([0,1])$, definiamo il funzionale

$$F(v) = \int_0^1 v(x)dx.$$

Proprietà dei funzionali

Sia V uno sp. vettoriale normato.

Definizione. Un funzionale F definito su V è **lineare** se

$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in V$$

Definizione. Un funzionale F definito su V è **limitato** se

$$\exists c > 0 : \quad |F(v)| \leq c\|v\|, \quad \forall v \in V$$

Definizione. Un funzionale F definito su V è **continuo** se per ogni $v \in V$ e per ogni successione v_n in V con $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ si ha $\lim_{n\to+\infty} F(v_n) = F(v)$.

Proprietà. Un funzionale lineare è continuo se e solo se è limitato.

Definizione. L'insieme dei funzionali lineari e continui su V è uno spazio vettoriale denotato con V' e chiamato **duale di** V.

Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

Siano:

1. $C^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni derivabili infinite volte su Ω,
2. $K \subset \Omega$ un compatto (cioè un insieme chiuso e limitato in Ω),
3. data $v : \Omega \to \mathbb{R}$, il **supporto** di v è
   $supp(v) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : \ v(\mathbf{x}) \neq 0\}}$

Definiamo

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \ \exists K \subset \Omega \ compatto : \ supp(v) \subset K\}$$

(lo spazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto). Si usa anche la notazione $C_0^\infty(\Omega)$ al posto di $\mathcal{D}(\Omega)$

Distribuzioni

Definizione. Una **distribuzione in** Ω è un funzionale lineare e continuo definito su $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè un elemento dello spazio duale $\mathcal{D}(\Omega)'$.

Quindi $\mathcal{D}(\Omega)'$ è lo spazio delle distribuzioni in Ω.

La delta di Dirac

Sia $x_0 \in \Omega$, la **delta di Dirac**,

$$\delta_{x_0}(v) = \langle \delta_{x_0}, v \rangle = v(x_0)$$

è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè è una distribuzione.

N.B. La delta di Dirac non soddisfa la definizione di funzione (in senso classico).

Derivata nel senso delle distribuzioni

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione in Ω e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La derivata direzionale $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ (per $i = 1, \ldots, d$) di una distribuzione è definita da:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$$

Quindi

$$\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \varphi \rangle = \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \rangle$$

Remark 1. La derivata di una distribuzione è ancora una distribuzione.

Remark 2. Una distribuzione può essere derivata infinite volte.

Spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \; \nabla u \in [L^2(\Omega)]^d\}$$

(le derivate sono da intendersi nel senso delle distribuzioni)

Prodotto scalare: $(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; d\Omega$

Norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega u^2 \; d\Omega + \int_\Omega |\nabla u|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Proprietà. $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.