DICACIM programme A.Y. 2019–20
Numerical Methods for Partial Differential Equations

Lab 4
Numerical solution of Advection Diffusion Reaction problems

Paola Gervasio

DICATAM, Università degli Studi di Brescia (Italy)

uniBS, May, 2020

Diffusione trasporto per $d = 1$

Scaricare il file `FEM_1d_ad.zip` dalla pagina moodle del corso, contiene il file `fem_1d_adsolver.m`.

```
help fem_1d_adsolver
  fem_1d_adsolver: solve -mu u''+bu'+sigma u=f in Omega
  with Dirichlet and/or Neumann boundary conditions
  by either P1-fem or P2-fem on a uniform grid.

  [nodes,uh]=fem_1d_adsolver(geom,problem_data,p,Ne)
  [nodes,uh]=fem_1d_adsolver(geom,problem_data,p,Ne,degree)

  Input: geom: struct with fields:
....
  Output: nodes = column array with the nodes of the mesh
          uh = column array of the numerical solution
```

Problema 1

Approssimare la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mu u'' + b u' = 0 & \text{in } \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0, \ u(1) = 1. \end{cases}$$

(avendo posto $\mu = 0.02$ e $b = 1$) con FEM-$\mathbb{P}_1$ e FEM-$\mathbb{P}_2$ e $Ne = 10, \ 20, \ 30, \ 40, \ 80.$

1. Calcolare il numero di Péclet $\mathbb{P}e = \frac{b}{\mu}\frac{h}{2}$ e verificare che la soluzione numerica non presenta oscillazioni quando $\mathbb{P}e < 1$.
2. Sapendo che la soluzione esatta è

$$u(x) = \frac{e^{xb/\mu} - 1}{e^{b/\mu} - 1}$$

verificare che l'errore $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ converge linearmente per i $\mathbb{P}_1$ e quadraticamente per i $\mathbb{P}_2$ quando $\mathbb{P}e < 1$.

Problema 2

Approssimare la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mu u'' + bu' = 0 & \text{in } \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0, \;\; u(1) = 1. \end{cases}$$

(avendo posto $\mu = 0.02$ e $b = 1$) con FEM-$\mathbb{P}_1$ e FEM-$\mathbb{P}_2$ ed il metodo della **diffusione artificiale** (cioè sostituendo μ con $\mu_h = \mu(1 + \mathbb{P}e)$) per $Ne = 10, \; 20, \; 30, \; 40, \; 80$.

1. Verificare che non si hanno oscillazioni per ogni valore di h considerato, anche quando $\mathbb{P}e > 1$.
2. Sapendo che la soluzione esatta è

$$u(x) = \frac{e^{xb/\mu} - 1}{e^{b/\mu} - 1}$$

verificare che l'errore $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ converge linearmente sia per i $\mathbb{P}_1$ che per i $\mathbb{P}_2$.

Diffusione trasporto reazione per $d = 2$

Scaricare il file `FEM_2d_ad.zip` dalla pagina moodle del corso, contiene il file `fem_2d_ad.m`.

```
>> help fem_2d_ad
  fem_2d_ad Computes matrices and rhs for
  GaLS-FEM-P1 approximation of
   -mu Delta u+ b . nabla u +sigma u=f in Omega (2D domain)
   u=g_D Dirichlet conditions on the boundary

  GaLS=Galerkin-Least-Squares stabilization

  [FEM]=fem_2d_ad(model,problem_data,parameters)

  Input:
  ...
    parameters = struct with fields
        .degree = degree of exactness of quadrature formulas
              (default value=4)   possible values: 1, 3, 4, 10
        .delta = coefficient for the stabilization
              (default value =1)
```

```
Output:
    FEM = struct with fields:
     .Kc:   % matrix A0, (i,j) non-dirichlet
     .Fc:   % rhs f0, (i) non-dirichlet
     .B:    % matrix to remap u0 in u
     .ud:   % ud = discrete lifting Rgd^h of gD
     .M:    % mass matrix
```

Un passo indietro

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} Lu = -\mu\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\mu > 0$ costante, $\mathbf{b}$ costante, $\sigma \geq 0$ costante.
La forma debole è: determinare $u = u^0 + Rg_D$, dove:

$$u^0 \in H^1_0(\Omega): \quad a(u^0, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

con

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\nabla u v + \int_\Omega \sigma u v, \qquad F(v) = \int_\Omega f v$$

e $Rg_D \in H^1(\Omega)$ è il lifting di g_D, cioè t.c. $Rg_D = g_D$ su $\partial\Omega$.

Definiamo lo spazio FEM-$\mathbb{P}_1$:

$$X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : \ v|_{T_k} \in \mathbb{P}_1, \ \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

e la base Lagrangiana $\beta = \{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ (incluse le funzioni associate ai nodi Dirichlet).

$$\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, N_h\}, \quad \mathcal{I}_D = \{i \in \mathcal{I} : \ \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_D\}, \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_D.$$

La soluzione discreta è

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_0} u_j \varphi_j}_{u_h^0} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_D} u_j}_{Rg_D^h}$$

con (lifting discreto)

$$Rg_D^h(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} g_D(\mathbf{x}_i) & \text{se } \mathbf{x}_i \in \partial\Omega_D \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo

- A matrice di elementi $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ per $i, j \in \mathcal{I}$,
- A_0 la sottomatrice di A con $i, j \in \mathcal{I}_0$,
- A_D la sottomatrice di A con $i \in \mathcal{I}_0$ e $j \in \mathcal{I}_D$,
- $\mathbf{f}$ vettore di elementi $f_i = F(\varphi_i)$ per $i \in \mathcal{I}$,
- $\mathbf{f}_0$ il sottovettore di $\mathbf{f}$ con $i \in \mathcal{I}_0$,
- $\mathbf{g}_D$ vettore dei valori $g_D(\mathbf{x}_i)$ con $i \in \mathcal{I}_D$,
- $\mathbf{u}_0 = [u_j]_{j \in \mathcal{I}_0}$, dof non-Dirichlet,
- $\mathbf{u}_D = [u_j]_{j \in \mathcal{I}_D}$, dof Dirichlet.

e la formulazione algebrica del problema in forma debole Galerkin è:

$$\left[\begin{array}{cc} A_0 & A_D \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{g}_D \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \leftarrow i \in \mathcal{I}_0 \text{ nodi non-Dirichlet} \\ \leftarrow i \in \mathcal{I}_D \text{ nodi Dirichlet} \end{array}$$

Cioè:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{g}_D, \quad A_0\mathbf{u}_0 + A_D\mathbf{u}_D = \mathbf{f}_0$$

e quindi

$$A_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0 - A_D\mathbf{g}_D.$$

Infine ricostruiamo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}$$

- `FEM.Kc` contiene la matrice A_0
- `FEM.Fc` contiene il vettore $\mathbf{f}_0 - A_D\mathbf{g}_D$
- `FEM.B` contiene una matrice B t.c. $B\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- `FEM.ud` contiene il vettore $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}$

Per calcolare **u**:

```
u0=FEM.Kc\FEM.Fc; % risolvo FEM.Kc u0 = FEM.Fc
u=FEM.B*u0+FEM.ud; % ricostruisco u
```

Galerkin Least Squares GaLS stabilization

La formulazione GaLS è: determinare $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v_h) + \sum_k \int_{T_k} Lu_h \, \tau_k \, Lv_h = F(v_h) + \sum_k \int_{T_k} f \, \tau_k \, Lv_h \qquad \forall v_h \in V_h$$

con $\tau_k = \delta \frac{h_k}{|\mathbf{b}|}$ **parametro di stabilizzazione**, $\delta > 0$.

1. Poiché $Lu = f$, (u è la soluzione esatta) si ha
   $\displaystyle\sum_k \int_{T_k} Lu \, \tau_k \, Lv_h = \sum_k \int_{T_k} f \, \tau_k \, Lv_h \qquad \forall v_h \in V_h$, questo metodo è fortemente consistente, la soluzione esatta soddisfa l'equazione discreta senza errori.
2. Per ogni $v_h \in X_h$ (sono $\mathbb{P}_1$), poiché μ è costante, succede che $-\nabla \cdot (\mu \nabla v_h) = 0$, quindi
   $$\int_{T_k} Lu_h \, \tau_k \, Lv_h = \int_{T_k} (\mathbf{b} \cdot \nabla u_h + \sigma u_h) \tau_k (\mathbf{b} \cdot \nabla v_h + \sigma v_h).$$
3. Se $\delta = 0$, GaLS si riduce a Galerkin classico.

Problema 3

Approssimare la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u = g_D & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

avendo fissato $\mu = 10^{-3}$, $\mathbf{b} = [1,1]^T$, $\sigma = 0$, $f = 1$, $g_D = 0$.

1. Fissare $\delta = 0$, corrispondente a Galerkin classico e calcolare la soluzione numerica con $h = 1/20$ e $h = 1/80$.
2. Fissare $\delta = 1$ e calcolare la soluzione numerica con $h = 1/20$ e $h = 1/80$.
3. Ripetere il lavoro con $\mu = 10^{-5}$.