Calcolo Numerico A, A.A. 2006/07
Pre appello 29 giugno 2007

Esercizio 1. La function `http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/lap_q1.m`, la cui sintassi di chiamata è `[A,b]=lap_q1(n)`, richiede in input un intero $n \geq 4$ e produce in output una matrice quadrata A di dimensione $ndim = n^2 - 4(n-1)$ ed un vettore colonna $\mathbf{b}$, anch'esso di dimensione $ndim$.

1) Studiare la dipendenza del numero di condizionamento $K(A)$ dal parametro n (si prenda $4 \leq n \leq 32$)

2) Stimare a priori l'errore relativo in norma euclidea sulla soluzione esatta che si commette qualora si risolva numericamente il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $n = 30$.

3) Analizzando le proprietà della matrice A, dire quali metodi diretti e iterativi conosciuti durante il corso possono essere applicati per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e dire quali sono preferibili in termini di ottimizzazione di CPUtime e di occupazione di memoria.

4) Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con i metodi diretti e/o iterativi che si conoscono e che possono essere applicati, fissando, per gli iterativi, `n=12, nmax=1000, tol=1.e-10, x0=rand(ndim,1)`. In base all'esperienza ed alle conoscenze acquisite durante il corso, commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 2 Si consideri il seguente metodo multistep

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), & n \geq 2 \\ u_0,\ u_1,\ u_2 \text{ assegnati} \end{cases} \tag{1}$$

1) Caratterizzare il metodo: dire se è esplicito/implicito, e a quanti passi è.
2) Utilizzando la function
`http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/multiste2.m`, si applichi il metodo multistep (1) per la risoluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2 & t \in [0,5] \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$.
Si tenga presente che il programma `multiste2.m` vuole in ingresso solo uno dato iniziale, mentre u_1 e u_2 vengono calcolati all'interno della function.
Si determini sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo.
3) Si diano limitazioni su h affinchè il metodo multistep (1) risulti (sperimentalmente) assolutamente stabile per la risoluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(t) = -10y(t) - 3 & t \in [0,10] \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$