Seconda prova di Calcolo Numerico A

Allievi LSINFO, LSELE, LSTLC

28 giugno 2005

Si vuole calcolare numericamente la traiettoria $(x(t), y(t), z(t))$ di un protone soggetto all'azione di un campo elettrico uniforme e costante $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ e di un campo magnetico pure uniforme e costante $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, al variare del tempo t. Indicando con $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) = (dx(t)/dt, dy(t)/dt, dz(t)/dt)$ la velocità del protone, l'equazione che ne regola il moto è

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}), \tag{1}$$

dove $q = +e = 1.6 \times 10^{-19} C$ e $m = 1.67 \times 10^{-27} kg$ rappresentano rispettivamente la carica e la massa del protone.
Ponendo l'origine del sistema degli assi cartesiani nella posizione iniziale del protone e ricordando che $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$, l'equazione (1) è ricondotta ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{q}{m}(E_1 t + B_3 * y(t) - B_2 z(t)) + v_{0,1}, & t \in [0,4] \\ y'(t) = \frac{q}{m}(E_2 t - B_3 * x(t) + B_1 y(t)) + v_{0,2}, & t \in [0,4] \\ z'(t) = \frac{q}{m}(E_3 t + B_2 * x(t) - B_1 y(t)) + v_{0,3}, & t \in [0,4] \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathbf{v}_0 = (v_{0,1}, v_{0,2}, v_{0,3}) ms^{-1}$ è la velocità del protone al tempo iniziale $t_0 = 0$.

Punto 1. Dati $\mathbf{v}_0 = (10^7, 0, 0)ms^{-1}$, $\mathbf{E} = (0,0,0)NC^{-1}$ e $\mathbf{B} = (0, 0, 1.3 \times 10^{-7})T$,
1.a calcolare numericamente la soluzione del problema (2) con i metodi di Eulero esplicito, AB2-AM3 e Runge-Kutta4 con passo costante $h = 10^{-2}$.
Le tre functions(`eulesp.m, ab2am3.m, rk4.m`), scaricabili dalla pagina web del corso, richiedono che la funzione f sia definita all'interno di una function matlab (come fatto per l'esempio Lotka-Volterra) e la chiamata a queste functions è del tipo:

```
[tn,un]=eulesp(t0,y0,h,tf,@nomefunction);
```

`tn` è un vettore colonna e `un` è una matrice di 3 colonne.
La function `nomefunction` avrà due input `(t,y)` e un output: `f`, che dovrà essere un vettore riga di 3 componenti. I vettori $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e gli scalari q e m devono essere definiti all'interno della function `nomefunction`.
Plottare le tre componenti della soluzione numerica ottenuta su tre grafici diversi. Plottare

su un quarto grafico la traiettoria della particella con il comando
`plot3(un(:,1),un(:,2),un(:,3))`.
Per visualizzare meglio la traiettoria (in funzione del tempo) può essere richiamata anche la function `tempo3` (scaricabile dalla pagina web) con la sintassi
`tempo3(un(:,1),un(:,2),un(:,3))`.
1.b Sapendo che la soluzione esatta è una traiettoria circolare che giace sul piano (x, y), commentare i risultati ottenuti con Eulero esplicito.
1.c Quale, tra le soluzioni ottenute con AB2-AM3 e RK4, sarà da preferirsi?

Punto 2. Dati $\mathbf{v}_0 = (10^7, 0, 10^7)ms^{-1}$, $\mathbf{E} = (0, 0, 0)NC^{-1}$ e $\mathbf{B} = (0, 0, 1.3 \times 10^{-7})T$,
2.1 calcolare numericamente la soluzione del problema (2) con il metodo AB2-AM3 prima con passo $h = 0.1$, poi con $h = 0.05$ ed infine con $h = 0.005$.
2.b Sapendo che la soluzione esatta è una traiettoria elicoidale, commentare la qualità della soluzione numerica e nel caso di una soluzione numerica non buona dare giustificazione del comportamento della soluzione numerica stessa.

Punto 3. Si considerino $\mathbf{v}_0 = (10^7, 2 \times 10^7, 10^7)ms^{-1}$, $\mathbf{E} = (10^4, 0, 10^4)NC^{-1}$ e $\mathbf{B} = (0, 0, 1.3 \times 10^{-7})T$.
La function `campoex.m`, la cui chiamata è `[xex,yex,zex]=campoex(tn,q,m,E,B,v0)`, ed il cui contenuto può essere visualizzato digitando il comando `type campoex`, valuta la soluzione esatta del sistema (2) in corrispondenza dei vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{v}_0$ assegnati. In output, le variabili `xex(n),yex(n),zex(n)` contengono le coordinate esatte della particella al tempo `tn(n)`.
3.a Dopo aver calcolato la soluzione numerica del problema (2) con il metodo RK4, calcolare l'errore assoluto e l'errore relativo tra la soluzione numerica e la soluzione esatta con la norma del massimo, prima con $h = 0.01$ e poi con $h = 0.001$.
Dato il vettore $\mathbf{v}$, la norma del massimo (o norma infinito) $\|\mathbf{v}\|_\infty$ di $\mathbf{v}$ può essere calcolata con il comando `max(abs(v))`.
Se `un(:,1)` contiene la prima componente della soluzione numerica e `xex` i corrispondenti valori della soluzione esatta, definiamo *errore assoluto* ed *errore relativo* (sulla prima componente della soluzione) rispettivamente le quantità scalari

```
err_ass_1=max(asb(un(:,1)-xex))
err_rel_1=max(asb(un(:,1)-xex))/max(asb(xex))
```

In maniera analoga si definiscono gli errori sulla seconda componente.
3.b È più significativo calcolare gli errori assoluti o gli errori relativi? Si verifica sperimentalmente l'andamento teorico degli errori sulle prime due componenti della soluzione, per lo schema RK4 e per i valori di h assegnati nel punto **3.a**? Perchè?