Alcuni esercizi in preparazione all'appello scritto di Calcolo Scientifico

Esercizio 1 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. Fissati $\mathbf{x}_0 = [0;0;0;0]$, `nmax=100` e `toll=1.e-6` determinare la soluzione numerica del sistema lineare dato con il metodo del Gradiente Coniugato, dire in quante iterazioni si è raggiunta la convergenza e dire se c'è accordo con i risultati teorici.

2. Risolvere il sistema lineare dato con il MEG. Confrontare la soluzione ottenuta col MEG con quella ottenuta con il metodo del Gradiente Coniugato. Ci sono differenze tra le due soluzioni calcolate? Commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [1, 4]$, con

$$f(x) = x^3 - \frac{141}{20}x^2 + \frac{33}{2}x - \frac{205}{16}. \tag{2}$$

1. In base al grafico della funzione, localizzare le radici dell'equazione.

2. Per l'approssimazione di tutte le radici utilizzare il metodo di Newton, scegliendo opportunamente il dato iniziale.

3. Quanto trovato sperimentalmente riflette quanto affermato dalla teoria? Giustificare la risposta.

Esercizio 3 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) - y^2(x) \quad 0 < x \leq 50 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = 2/(-1 + 3e^{2x})$.
1. Verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo di Crank-Nicolson, prendendo $x \in [0, 10]$.
2. Utilizzando la function `ab3.m`, determinare sperimentalmente condizioni su h affinché la soluzione calcolata con il metodo di AB3 (Adams-Bashforth di ordine 3) $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$ non presenti oscillazioni spurie, cioè oscillazioni numeriche che nulla hanno a che fare con la soluzione esatta del problema. A cosa possiamo imputare l'eventuale presenza di oscillazioni spurie?

Esercizio 4 Si consideri il sistema lineare $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove H è la matrice di Hilbert di ordine $n = 4$ (generata con il comando `H=hilb(4)`) e $\mathbf{b} = [25/12;\ 77/60;\ 57/60;\ 319/420]$.

E' possibile risolvere il sistema lineare dato con i metodi del Gradiente e del Gradiente Coniugato? In caso affermativo si fissino $\mathbf{x}_0 = [0; 0; 0; 0]$, `nmax=500` e `toll=1.e-4` e dire in quante iterazioni si è raggiunta la convergenza con i due metodi.

Esercizio 5 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [0, 4]$, con

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10. \tag{4}$$

1. In base al grafico della funzione, localizzare le radici reali dell'equazione.
2. E' possibile applicare il metodo di bisezione a partire dall'intervallo $[1, 2]$ per calcolare una radice dell'equazione data? In caso affermativo calcolare la radice con `bisection.m` e dire in quante iterazioni si ottiene un errore minore o uguale a 10^{-5}.
3. Data

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x} \tag{5}$$

studiare la convergenza del metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ per $k \geq 0$ alla radice di $f(x) = 0$.

Esercizio 6 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) & 0 < x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

con i metodi di Adams-Bashforth2 (`ab2.m`) e Runge-Kutta2 (`rk2.m`)
1. Determinare sperimentalmente condizioni su h affinché i metodi dati siano assolutamente stabili.
2. Verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza dei metodi dati.
3. Sapendo che l'errore tra la soluzione esatta e la soluzione numerica si può esprimere come

$$|y(x_n) - u_n| = Ch^p \tag{7}$$

essendo p l'ordine di convergenza, determinare C per i due metodi.

Esercizio 7 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

1. E' possibile risolvere il sistema lineare dato con i metodi del Gradiente e del Gradiente Coniugato? Perché?

2. Fissati $\mathbf{x}_0 = [0; 0; 0]$, `nmax=100` e `toll=1.e-6` determinare la soluzione numerica del sistema lineare dato con Gradiente e Gradiente Coniugato e dire in quante iterazioni si è raggiunta la convergenza. Come mai i due metodi si comportano in maniera così diversa?

Esercizio 8 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [1, 4]$, con

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.1476. \tag{9}$$

1. In base al grafico della funzione, localizzare le radici dell'equazione.
   Per l'approssimazione di tali radici considerare le seguenti funzioni di punto fisso:

$$g_1(x) = \frac{x^2 + 6.1476}{5}, \qquad g_2(x) = \sqrt{5x - 6.1476}. \tag{10}$$

2. Dire se esse sono adeguate per il calcolo delle radici di (9) (fare l'analisi per entrambe le radici) e motivare la risposta.
3. Approssimare le radici di (9) con le funzioni di punto fisso g_1 e g_2, richiamando `ptofisso.m`, con `toll=1.e-6`, `nmax=200`.
4. Come mai la convergenza dei metodi di punto fisso è molto lenta?

Esercizio 9 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = -(1+2i)y(x) & 0 < x \le 10 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = e^{-(1+2i)x}$.
1. Determinare per via teorica condizioni su h affinché il metodo di Eulero esplicito sia assolutamente stabile.
2. Determinare sperimentalmente condizioni su h affinché il metodo di Eulero esplicito sia assolutamente stabile. Commentare i risultati ottenuti alla luce di quanto trovato al passo 1.
3. Richiamando la function `rk2.m` e considerando $x \in [0, 2]$, verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo implementato in `rk2.m`.

Esercizio 10 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

1. E' possibile risolvere il sistema lineare dato con il MEG, con la fattorizzazione di Cholesky e con il metodo del Gradiente Coniugato? Perché?
2. Risolvere il sistema dato con il/i metodi per cui è possibile. Nel caso si possa usare il metodo del Gradiente Coniugato, considerare `nmax=100` e `toll=1.e-6`.

Esercizio 11 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [-1, 1]$, con

$$f(x) = e^x - 4x^2. \tag{13}$$

1. In base al grafico della funzione, localizzare le radici dell'equazione.

2. Per l'approssimazione di tutte le radici utilizzare il metodo di Newton, scegliendo opportunamente il dato iniziale.

3. Quanto trovato sperimentalmente riflette quanto affermato dalla teoria? Giustificare la risposta.

Esercizio 12 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{3}{2}y(x) & 0 < x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

1. Determinare per via teorica condizioni su h affinché il metodo di Eulero esplicito sia assolutamente stabile.
2. Determinare sperimentalmente condizioni su h affinché il metodo di Eulero esplicito sia assolutamente stabile. Commentare i risultati ottenuti alla luce di quanto trovato al passo 1.
3. Richiamando la function `ab2.m`, con $x \in [0, 2]$, determinare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo di Adams-Bashforth $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$ e, aiutandosi con il grafico della regione di assoluta stabilità, determinare condizioni su h affinché il metodo sia assolutamente stabile.

Esercizio 13 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 7.5 & 1.0 & -2.0 & 0 \\ 0.5 & 7.5 & 1.0 & -2.0 \\ -1.0 & 0.5 & 7.5 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0.5 & 7.5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ -11.0 \\ 0.5 \\ 16.0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

1. Prima di risolvere numericamente il sistema lineare dire se i metodi del Gradiente e del Gradiente Coniugato possono convergere alla soluzione del sistema lineare (15) e perché.

2. Fissati $\mathbf{x}_0 = [0; 0; 0; 0]$, `nmax=500` e `toll=1.e-6`, richiamare le function del Gradiente e del Gradiente Coniugato e verificare quanto congetturato al passo precedente.

Esercizio 14 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [-10, 2]$, con

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x^2 + 1). \tag{16}$$

1. In base al grafico della funzione, dire quante radici ha l'equazione data e localizzarle.

2. Per l'approssimazione di tali radici considerare la seguente funzione di punto fisso:

$$g(x) = -2\log(x^2 + 1). \tag{17}$$

Dire se essa è adeguata per il calcolo di ogni radice di (16) e motivare la risposta. Approssimare le radici di (16) richiamando `ptofisso.m`, con `toll=1.e-6`, `nmax=100`.

Esercizio 15 Si costruisca il polinomio interpolatore composito lineare (denotato con $p_1^c(x)$) della funzione $f(x) = sin(x)$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, con 5,10,20 intervallini. Dire se $\lim_{M\to\infty} \|f - p_1^c\| = 0$, essendo M il numero di intervallini utilizzati, e giustificare la risposta.

Esercizio 16 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 11.55 & 8.7 & 7.15 & 6.9 & 7.95 \\ 8.7 & 10.55 & 8.45 & 7.65 & 6.9 \\ 7.15 & 8.45 & 11.05 & 8.45 & 7.15 \\ 6.9 & 7.65 & 8.45 & 10.55 & 8.7 \\ 7.95 & 6.9 & 7.15 & 8.7 & 11.55 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 50.9 \\ 58 \\ 55.9 \\ 48.6 \\ 40.1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

1. Fissati $\mathbf{x}_0 = [0; 0; 0; 0; 0]$, `nmax=100` e `toll=1.e-6`, si dica se i metodi del Gradiente e del Gradiente Coniugato convergono alla soluzione del sistema lineare (18) e in quante iterazioni.
2. Commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 17 Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ sull'intervallo $I = [-2, 1]$, con

$$f(x) = x^3 + \frac{11}{10}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{8}{25}. \tag{19}$$

1. Fissato `toll=1.e-6`, si scelgano opportuni dati iniziali in modo che i metodi di secanti e di Newton convergano alle radici dell'equazione data.
2. In base all'ordine di convergenza stimato per i due metodi, commentare i risultati ottenuti al punto precedente.
3. Dire se la seguente funzione di punto fisso

$$g(x) = x^3 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{21}{25}x - \frac{8}{25} \tag{20}$$

   è adeguata per la determinazione delle radici di $f(x)$, motivando la risposta.

Esercizio 18 Interpolare la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ con il polinomio di interpolazione di Lagrange, nell'intervallo $I = [-4, 4]$ su $(n + 1)$ nodi equispaziati, con $n = 4,\ 8,\ 12$. In base al disegno della funzione e dei suoi interpolati dire se $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty$ è eguale a zero o no.

Esercizio 19 Si vuole calcolare numericamente l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 (x^{5/2} + x^3 + 1)\mathrm{d}x \tag{21}$$

con le formule di trapezi composita e Simpson composita, utilizzando m suddivisioni con $m = 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160$. (Si utilizzino a tal proposito le function `trapz.m` (di MATLAB) e `simpsonc.m` (function implementata a lezione o da scaricare dalla pagina del corso).

Si determini sperimentalmente l'ordine di accuratezza dei due metodi, giustificando il comportamento anomalo della formula di Simpson composita.

Esercizio 20 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = -(x+1)y(x) & 0 < x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{22}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}-x}$.
1. Determinare condizioni su h affinché il metodo di Eulero Esplicito sia assolutamente stabile.
2. Verificare sperimentalmente la stima ottenuta al passo precedente .
3. Si determini sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo predictor-corrector ottenuto combinando il metodo di Eulero esplicito (predictor) con il metodo di Crank-Nicolson (corrector). Utilizzare la function `heun.m` con $x \in [0, 6]$.

Esercizio 21 Si consideri il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y(x) & 0 < x \leq 4 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{23}$$

3.a Fornire limitazioni teoriche su h affinché il metodo di Eulero esplicito sia assolutamente stabile.

3.b Plottando in un medesimo grafico la soluzione esatta ($y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$) e la soluzione numerica ottenuta con il metodo di Eulero esplicito, verificare quanto trovato al punto 2.a. (Utilizzare a tale proposito l'intervallo $[0, 200]$).

3.c Per i valori di $h = 0.25,\ 0.125,\ 0.0625,\ 0.03125$ plottare in un medesimo grafico la soluzione numerica ottenuta con il metodo di Eulero esplicito e la soluzione esatta e stampare a video l'errore tra la soluzione numerica e la soluzione esatta in corrispondenza di $x = 4$.
Dai dati stampati a video ricavare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo utilizzato.