Calcolo Scientifico, Calcolo Numerico, A.A. 2014/15
Appello 30 marzo 2015

Esercizio 1
Si vuole interpolare la funzione

$$f(x) = 0.0039 + \frac{0.0058}{1 + e^{(x-35)/5}}$$

sull'intervallo $[0, 70]$ al variare del numero N di nodi di interpolazione con due metodi:
1. interpolazione globale di Lagrange su N nodi di Chebyshev,
2. interpolazione composita lineare su N nodi equispaziati.
In entrambi i casi denotiamo con $\tilde{f}_N$ l'interpolatore. Attenzione che N non rappresenta il grado del polinomio, ma il numero di nodi.

1.a) Per entrambi i metodi, al variare di $N = 5 : 4 : 41$:
- costruire il polinomio interpolatore $\tilde{f}_N$,
- rappresentare su uno stesso grafico la funzione $f(x)$ e l'interpolatore $\tilde{f}_N(x)$ (valutandolo in 1000 punti equispaziati in $[0, 70]$),
- calcolare l'errore $e_N = \|f - \tilde{f}_N\|_\infty$, valutandolo su un vettore di 1000 punti equispaziati in $[0, 70]$.

Per l'interpolazione globale, invece di utilizzare le funzioni matlab `polyfit`, `vander` e `polyval`, richiamare la function `barycentric.m` che si trova alla pagina del corso (nel direttorio delle function matlab). La function `barycentric.m` ha gli stessi input ed output della function `interp1.m`

1.b) Su un secondo grafico rappresentare gli errori e_N al variare di N per entrambi gli interpolatori ed analizzare il tipo di convergenza di $\tilde{f}_N$ ad f al crescere del numero di punti N, ovvero dire se, al crescere del numero di punti, si ha convergenza o meno alla funzione f e, nel caso vi sia convergenza, stimare l'ordine di convergenza: lineare, quadratica, cubica, ... Giustificare le conclusioni con grafici e/o considerazioni chiare.

Esercizio 2
Si vuole risolvere il sistema non lineare

$$\begin{cases} x\sin(z) - y\cos(z) - x = 0 \\ x\cos(z) - y = 0 \\ x\sin(z) - z = 0 \end{cases}$$

2.a) Utilizzare il metodo di Newton con tolleranza pari a $\epsilon = 10^{-10}$ e numero massimo di iterazioni pari a 100. Si considerino i seguenti dati iniziali:
1. $\mathbf{x}^{(0)} = [-0.1, 0.1; -0.5]$
2. $\mathbf{x}^{(0)} = [-3; 3; -3]$.

In entrambi i casi determinare la soluzione a cui il metodo di Newton converge indicando il numero di iterazioni necessarie alla convergenza, quindi concludere se la radice calcolata è semplice o multipla giustificando la risposta e facendo le opportune verifiche in base alla teoria studiata.

Esercizio 3 Si vogliono studiare le proprietà del seguente metodo:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, u_n), \quad n \geq 0 \\ u_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{1}$$

per risolvere numericamente un problema di Cauchy del primo ordine.

3.a) Partendo dalla propria function che implementa il metodo di Eulero esplicito, modificarla affinchè implementi il metodo proposto, quindi utilizzarla per risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = -3y(t) \quad t \in (0, 6) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

In particolare, utilizzando i seguenti valori di $h \in \{0.1,\ 0.05,\ .01,\ 0.005,\ 0.001\}$, plottare la soluzione numerica e la soluzione esatta su uno stesdo grafico e dire se il metodo sta convergendo (ed eventualmente con quale ordine) o meno (ed eventualmente per quale motivo) alla soluzione esatta $y(t) = e^{-3t}$ del problema dato quando $h \to 0$. Giustificare in maniera esauriente la risposta data.

3.b) Si ponga ora $T = 100$ e si considerino i seguenti valori di $h \in \{0.1,\ 0.3,\ 1,\ 1.5\}$. Per ognuno di questi valori dire se il metodo risulta assolutamente stabile o meno.

3.c) Quali conclusioni possiamo trarre su questo metodo? È un metodo migliore o peggiore di Eulero esplicito?