Calcolo Numerico A, A.A. 2006/07
Appello 23 luglio 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(x)(cos(x) - 1)$$

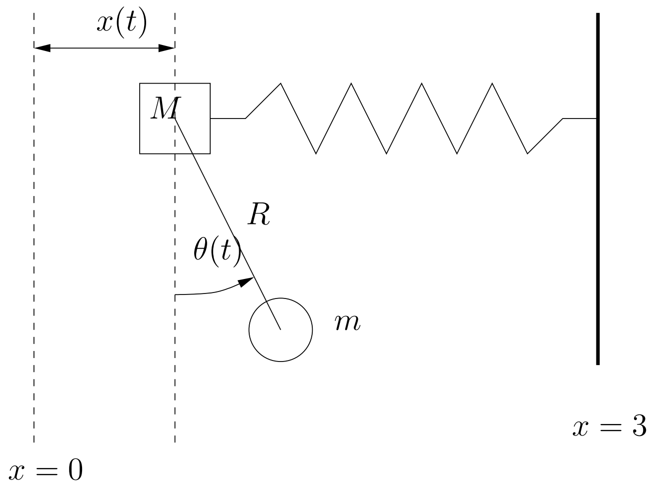
sull'intervallo $I = [-2\pi, 2\pi]$.
Costruire il polinomio interpolatore globale di Lagrange di grado n ($p_n(x)$) su $n+1$ nodi equispaziati e su $n+1$ nodi di Chebyshev, al variare di $n = 6 : 2 : 20$.
Rappresentare su uno stesso grafico la funzione $f(x)$ da interpolare, il polinomio interpolatore di Lagrange su nodi equispaziati e l'interpolatore di Lagrange su nodi di Chebysehv.
Si consideri un set di 101 nodi equispaziati in I (lo si denoti con $\tilde{\mathbf{x}}$). Si valutino gli errori

$$E_n = \max_{i=1,\dots,101} |f(\tilde{x}_i) - p_n(\tilde{x}_i)|$$

al variare di n, sia per l'interpolazione su nodi equispaziati, sia per l'interpolazione con nodi di Chebyshev e si riportino tali errori in uno stesso grafico (in scala semilogaritmica) in cui in ascissa ci sia n ed in ordinata gli errori E_n. Commentare i risultati ottenuti. Riflettono quanto predetto dalla teoria?

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema costituito da: parete - molla - corpo - pendolo



in cui il corpo rigido all'estremità della molla può muoversi solo lungo la direzione orizzontale ed il pendolo si può muovere nel piano verticale.

Le equazioni che descrivono il moto del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{mR(\theta')^2 \sin\theta + mg\sin\theta\cos\theta - kx - dx' + \frac{b}{R}\theta'\cos\theta}{M + m\sin^2(\theta)} & t \geq t_0 \\ \theta''(t) = \dfrac{-mR(\theta')^2 \sin\theta\cos\theta - (m+M)g\sin\theta + kx\cos\theta + dx'\cos\theta - \left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{b}{R}\theta'}{R(M + m\sin^2(\theta))} & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = 0 \\ \theta(t_0) = \theta_0,\ \theta'(t_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove:
M è la massa del corpo,
m è la massa del pendolo,
R è la lunghezza del pendolo
g è la costante di gravità (9.8)
k è la costante elastica della molla
d è la costante di attrito del corpo
b è la costante di attrito del pendolo
$x(t)$ è la posizione, al tempo t del corpo di massa m, mentre $\theta(t)$ è l'angolo che l'asta del pendolo forma con l'asse verticale passante per $x(t)$ al tempo t (si veda la figura). La posizione $x(t) = 0$ fa riferimento alla situazione di molla in posizione di equilibrio.
Considerando i seguenti dati: $M = 1$, $m = 1$, $R = 1$, $k = 6$, $d = b = 0$ e, supponendo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo di massa M sia, in posizione $x_0 = 0$ e che il pendolo formi un angolo $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ con la verticale, si vuole simulare il moto del sistema, utilizzando degli schemi numerici per l'approssimazione di equazioni differenziali ordinarie.

Dopo aver riscritto il sistema (1) come sistema di equazioni del primo ordine, nella forma

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t \geq t_0 \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{2}$$

scrivere una function matlab per la valutazione della funzione $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$.
Scrivere un `m-file` che:
- definisca i dati iniziali,
- richiami gli schemi numerici (Eulero esplicito (`feuler.m`) e Runge-Kutta 4 (`rk4.m`)) per la risoluzione del sistema dato,
- richiami la function `molla_pendolo.m` per la simulazione dell'evoluzione del sistema (uso:
`molla_pendolo(tn,un)`, dove `tn,un` sono i vettori contenenti i tempi e la soluzione numerica).
Si utilizzi come intervallo temporale $(t_0, T) = (0, 20)$.
Fissato $h = 0.02$, commentare i risultati ottenuti con i metodi di Eulero esplicito e Runge-Kutta 4, dire se sono entrambe accettabili e giustificare eventuali comportamenti anomali.