Calcolo Scientifico, A.A. 2020/21
Appello 18 gennaio 2021

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina
`https://elearning.unibs.it/course/view.php?id=20385`

Esercizio 1.

I punti di equilibrio di un sistema dinamico sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 0.3x - 0.05x^2 - 0.03\arctan(x)y = 0 \\ 0.2x - 0.04y^2 + 0.2x\arctan(y) = 0 \end{cases}$$

e sono inclusi nel rettangolo $D = [-5, 10] \times [-10, 10]$.

Punto 1.1. Localizzare tutti i punti di equilibrio e dire quanti sono.

Punto 1.2. Approssimare tutti i punti di equilibrio con una precisione pari a 10^{-6}, scegliendo uno dei metodi visti a lezione e definendo opportunamente gli input richiesti dalla function che si vuole utilizzare.

Punto 1.3. Per ognuno dei punti trovati, dire quante iterazioni sono servite per arrivare a convergenza e quanto è l'ordine di convergenza del metodo scelto. Dire inoltre se i risultati numerici sono in accordo con quanto affermato dalla teoria.

Esercizio 2.

Si vogliono calcolare i coefficienti del polinomio interpolatore di Lagrange di grado 4 che interpola la funzione

$$f(x) = \sin(2\pi x^2)$$

in 5 punti equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$.
A tale scopo si vuole risolvere il sistema $X\mathbf{a} = \mathbf{y}$, essendo X la matrice di VanderMonde, $\mathbf{a}$ il vettore dei coefficienti del polinomio e $\mathbf{y}$ il vettore dei valori della funzione f nei nodi di interpolazione.

Punto 2.1. Risolvere il sistema $X\mathbf{a} = \mathbf{y}$ con uno dei metodi visti a lezione, giustificando la propria scelta, rappresentare su uno stesso grafico la funzione f, il polinomio interpolatore di Lagrange ed i nodi di interpolazione.

Punto 2.2. Stimare l'errore relativo che si commette nel risolvere il sistema $X\mathbf{a} = \mathbf{y}$, sapendo che gli errori sui dati sono dell'ordine della precisione di macchina.

Esercizio 3.

Si consideri il seguente metodo per approssimare la soluzione di equazioni differenziali ordinarie:

$$
\begin{aligned}
&K_1 = f(t_n, u_n),\\
&K_2 = f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, u_n + \tfrac{h}{2}K_1\right),\\
&K_3 = f(t_n + h, u_n + h(2K_2 - K_1)),\\
&u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Punto 3.1 Dire quanti passi ha il metodo, se è esplicito o implicito, se è un metodo multistep o no.

Punto 3.2 Il metodo è implementato nella function `metodo_2021.m`. Determinare sperimentalmente l'ordine di accuratezza del metodo risolvendo il problema

$$
\begin{cases}
y'(t) = -5y(t) & t \in [0, 5]\\
y(0) = 1
\end{cases}
$$

(la cui soluzione esatta è $y(t) = e^{-5t}$) prendendo alcuni valori di $h \leq 1$.

Punto 3.3

Il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$
\begin{cases}
S'(t) = 1 - 1.1\, S(t)P^2(t) & t \in [0, 100]\\
P'(t) = 1.1\, S(t)P^2(t) - P(t) & t \in [0, 100]\\
S(0) = 0.95, P(0) = 1.02,
\end{cases}
\tag{2}
$$

modellizza la *glicolisi*, uno dei processi metabolici fondamentali del nostro corpo durante il quale vengono prodotte molecole energetiche che poi vengono consumate dalle cellule. $S(t)$ denota la concentrazione di F6P (fruttosio 6-fosfato) al tempo t; $P(t)$ denota la concentrazione di ADP (adenosina difosfato) al tempo t.

- Risolvere il sistema (2) richiamando la function `metodo_2021.m` con $h = 0.01$ e rappresentare graficamente la soluzione numerica calcolata.
- In base alle proprietà del metodo trovate al Punto 3.2, stimare l'ordine di grandezza dell'errore tra la soluzione numerica e quella esatta (non nota).
- Potrà essere utilizzato un passo di discretizzazione h grande a piacere per risolvere questo problema con il metodo (1)? Giustificare la risposta.