Calcolo Scientifico, A.A. 2022/23
Appello 17 gennaio 2023

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`.

Esercizio 1.

Si vuole interpolare la funzione

$$f(x) = e^{-x\,\cos(\pi x)}, \tag{1}$$

sull'intervallo $[-3, 1]$.

Punto 1.1
Al variare di $n = 4, \ldots, 16$:

- calcolare il polinomio di interpolazione globale di Lagrange $p_n(x)$ di grado n che interpola f in $(n+1)$ nodi equispaziati in $[-3, 1]$ (si utilizzi uno qualsiasi dei metodi visti a lezione),
- disegnare su uno stesso grafico la funzione $f(x)$, il polinomio p_n ed i nodi di interpolazione utilizzati per costruire p_n,
- valutare e stampare a video l'errore $\|f - p_n\|_\infty$ (utilizzando 1000 punti equispaziati nell'intervallo).

Rappresentare in un secondo grafico gli errori $\|f - p_n\|_\infty$ al variare di n e commentare il loro comportamento quando n cresce.
Commentare infine il grafico di $p_n(x)$ quando $n = 16$.

Punto 1.2 Si consideri ora l'interpolatore composito lineare p_1^c che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati in $[-3, 1]$.
Sapendo che

$$\|f - p_1^c\|_\infty \leq \frac{1}{8} H^2 \|f''(x)\|_\infty, \tag{2}$$

dove H è la distanza tra due nodi di interpolazione successivi,

- calcolare su carta il minimo numero $\overline{n}$ di nodi di interpolazione per cui l'errore fornito dalla stima (2) è minore o uguale a 10^{-1},[*]
- disegnare su uno stesso grafico la funzione $f(x)$ e l'interpolatore composito $p_1^c(x)$ costruito con $\overline{n}$ nodi di interpolazione,
- calcolare $\|f - p_1^c\|_\infty$ utilizzando $\overline{n}$ nodi di interpolazione e verificare che $\|f - p_1^c\|_\infty \leq 10^{-1}$.

[*]Per il calcolo delle derivate di f si può utilizzare il toolbox di calcolo simbolico di Matlab. Esempio per calcolare la derivata prima di una funzione g: `syms x; g=sin(x); g1=diff(g,x) % (funzione simbolica); fun1=matlabFunction(g1) % (function handle)`

Esercizio 2.

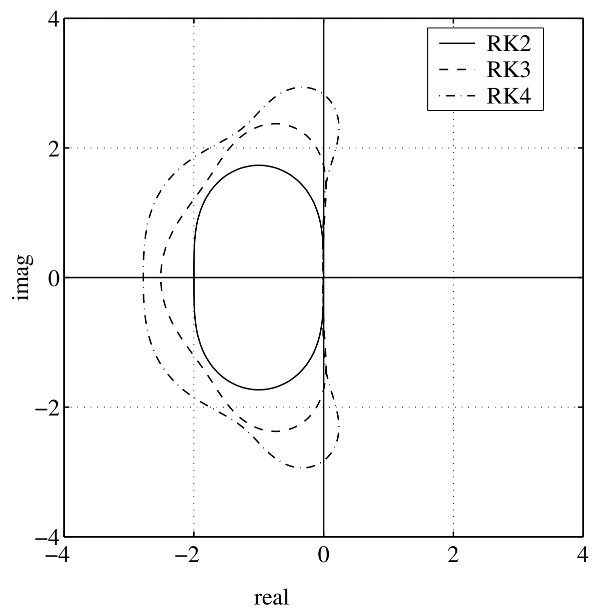
Si vuole risolvere il problema di Cauchy del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4y_1(t) - 6y_2(t) & \text{per } t \in [0, 20] \\ y_2'(t) = 3y_1(t) - y_2(t) + e^{-\cos(t)} \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Punto 2.1 Scrivere un `m-file` in cui:
- si definiscono i dati dal problema,
- si richiama il metodo RK4 per la risoluzione del sistema dato (`rk4.m`),
- si risolve il sistema con $h = 0.01$,
- si rappresentano graficamente le funzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Punto 2.2 Considerare ora il sistema omogeneo, ottenuto eliminando il termine $e^{-cos(t)}$. Avvalendosi del grafico riportato a fianco, determinare il valore di h_0 tale che, per ogni $h < h_0$, RK4 sia assolutamente stabile nella risoluzione del sistema dato.

Punto 2.3 Prendendo prima $h = 0.5$ e poi $h = 0.6$, calcolare la soluzione numerica del sistema omogeneo e rappresentarla graficamente. Dire, per ognuno dei valori di h, se lo schema RK4 è assolutamente stabile per la risoluzione di questo problema.



Punto 2.4 Risolvere il problema originario non omogeneo con $h = 0.5$, confrontare questa soluzione con quella ottenuta con $h = 0.01$ e dire se $h = 0.5$ è un passo accettabile o no.

Domanda 1.
Il numero di condizionamento di matrice, come è definito e qual è la sua utilità. In quali stime entra in gioco?

Domanda 2.
Il metodo di Newton:

1. a cosa serve,
2. come si formula,
3. come deve essere scelto il punto iniziale,
4. che proprietà di convergenza ha il metodo,
5. quale test d'arresto è preferibile applicare per fermare il metodo.