Calcolo Numerico - A.A. 2013/14
Appello 16 aprile 2014

Esercizio 1 Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{100x^2 - 100x + 26} \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

e sia $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ l'interpolatore globale di Lagrange che interpola f nei nodi $\{x_i\}_{i=0}^n$.

I nodi di interpolazione $\{x_i\}_{i=0}^n$ vengono definiti richiamando la function
`http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/xwlgl.m`,
la cui sintassi di chiamata è: `[x]=xwlgl(np,a,b)`. `np`$=n+1$ è il numero dei nodi, mentre `a` e `b` sono gli estremi dell'intervallo cui appartengono i nodi.

Punto 1.1
Scrivere un m-file in cui, fissato n, si costruisce il polinomio $p_n(x)$ con il metodo della matrice di Vandermonde, lo si valuta e lo si disegna.

Punto 1.2
Per $n = 4 : 2 : 20$, valutare l'errore di interpolazione nella norma discreta del massimo

$$e_n^{int} = \|f - p_n\| = \max_{1\le i\le 1000} |f(\tilde{x}_i) - p_n(\tilde{x}_i)|, \tag{2}$$

essendo i punti $\tilde{x}_i$ 1000 nodi equispaziati in $[0,1]$.
Rappresentare su una figura gli errori e_n^{int} al variare di n e dire se la successione p_n sta convergendo ad f per $n \to \infty$, nella norma discreta del massimo.

Punto 1.3
Fissato n, sia X_n la matrice di Vandermonde costruita per calcolare $p_n(x)$, sia $\mathbf{a}_n$ il vettore dei coefficienti di p_n e sia $\mathbf{y}_n$ il vettore dei valori $f(x_i)$.
Supponendo che gli errori sui dati del sistema lineare $X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}_n$ siano solo dovuti all'arrotondamento di macchina, stimare l'errore (che chiamiamo $e_n^{\mathbf{a}}$) che si può commettere nel risolvere il sistema $X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}_n$.
Per $n = 4 : 2 : 30$, calcolare e memorizzare le stime di questi errori $e_n^{\mathbf{a}}$ in un vettore. Da cosa dipendono in maniera lineare questi errori?

Punto 1.4
Plottare su un grafico gli errori di interpolazione e_n^{int} e gli errori $e_n^{\mathbf{a}}$, per $n = 4 : 2 : 30$.
Esiste un legame tra gli errori e_n^{int} e gli errori $e_n^{\mathbf{a}}$? Giustificare la risposta.

Esercizio 2 Il seguente sistema modella l'evoluzione nel tempo della concentrazione di due specie chimiche $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ che interagiscono fra di loro all'interno di un mezzo omogeneo:

$$\begin{cases} y_1' = -10^3 y_1 + \dfrac{y_2}{1+y_2}\left(10^3 - \dfrac{1}{1+y_2}\right) & t \in (0,10] \\ y_2' = -y_2, & t \in (0,10] \\ y_1(0) = 1.5 \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Punto 2.1
Scrivere un m-file in cui si definiscono i dati del problema e si approssima la soluzione richiamando la function `ode23s` di matlab, la cui sintassi è: `[tn, un]=ode23s(f,tspan,y0)`.
Rappresentare graficamente la soluzione numerica ottenuta.
Punto 2.2
Si risolva ora il problema con il metodo di Eulero esplicito utilizzando $h = 0.001$, $h = 0.0019$, $h = 0.002$ e $h = 0.0021$.
Per ogni valore di h rappresentare graficamente la soluzione numerica ottenuta e commentare adeguatamente il comportamento del metodo nei vari casi.

Esercizio 3 Si vuole calcolare la radice della funzione

$$f(x) = e^{-x^2} - x(\sin(x) + 2)$$

con la funzione di punto fisso

$$\phi(x) = \frac{1}{e^{x^2}(\sin(x) + 2)}.$$

Punto 3.1
Dire se la funzione $\phi(x)$ è adeguata per calcolare la radice di f e se il metodo di punto fisso

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

converge alla radice cercata.
Punto 3.2
Utilizzando una function che implementa il metodo di punto fisso, verificare le conclusioni ottenute al punto precedente, riportando (in caso di convergenza) il numero di iterazioni effettuate dal metodo di punto fisso ed il valore numerico delle radici trovate. Fissare tolleranza `tol=1.e-8` e numero massimo di iterazioni pari a 100. Scegliere opportunamente il punto $x^{(0)}$.