Calcolo Scientifico, A.A. 2023/24
Appello 12 luglio 2024

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`.

Esercizio 1.

Nel file `es120724.mat` sono memorizzati una matrice $A \in \mathbb{R}^{1000\times 1000}$ ed un vettore colonna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1000}$. Per caricarli in MATLAB, digitare `load('es120724')`.
Si vuole risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Punto 1.1. Verificare che la matrice è simmetrica definita positiva.

Punto 1.2. Risolvere il sistema lineare con il metodo del gradiente (`gradiente.m`) ed il metodo del gradiente coniugato (`gradiente_coniugato.m`), prendendo vettore iniziale nullo, tolleranza pari a 10^{-10} e `kmax` $= 200$ per il test d'arresto.
Riportare in un grafico in scala semilogaritmica i vettori dei residui dei due metodi e commentare i risultati ottenuti.
Dire se ognuno dei due metodi è arrivato a convergenza ed in quante iterazioni. Nel caso non si sia raggiunta la tolleranza del test d'arresto, spiegare perché. (Si osservi che la matrice è memorizzata in formato `sparse` e per calcolarne il numero di condizionamento bisogna convertirla prima al formato `full`).

Punto 1.3. Calcolare il fattore R della fattorizzazione di Cholesky di A.
Rappresentare il pattern delle matrici A e R con il comando `spy`.
Fornire una stima di quante operazioni elementari sono svolte per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la fattorizzazione di Cholesky e quante per risolvere lo stesso sistema con il Metodo del Gradiente Coniugato, tenendo presente che, della matrice A, sono stati memorizzati solo gli elementi non nulli (6 per ogni riga ad eccezione della prima riga). Per quanto riguarda il costo del Gradiente Coniugato, per ogni iterazione limitarsi a considerarne l'operazione più onerosa.

Esercizio 2.

Il seguente sistema modellizza l'evoluzione di un sistema preda-predatore:

$$\begin{cases} N' = N\left(1 - \frac{N}{7}\right) - \frac{NP}{N+1}, & \text{per } 0 \le t \le 200 \\ P' = \frac{1}{10}\,P\left(1 - \frac{P}{N}\right), & \text{per } 0 \le t \le 200 \\ N(0) = 3 \\ P(0) = 0.1, \end{cases} \tag{1}$$

dove $N = N(t)$ e $P = P(t)$ rappresentano rispettivamente la numerosità di esemplari di prede e di predatori al tempo t (le grandezze sono adimensionalizzate).

Punto 2.1 Scrivere uno script MATLAB che svolga le seguenti operazioni:
- definire i dati e la funzione del sistema che raccoglie i termini di destra delle equazioni

differenziali,
- richiamare lo schema Eulero Esplicito (`eulero_esp.m`) e lo schema Runge Kutta 4 (`rk4.m`) per la risoluzione del sistema dato, con passo temporale $h = 0.1$,
- rappresentare graficamente la soluzione del sistema (si consiglia di rappresentare tutto in un solo grafico).
Tra le due soluzioni quale è la più accurata e perché?

Punto 2.2 Calcolare la soluzione numerica con RK4 e $h = 1/2$ e con EE e $h = 1/2$, $h = 1/5$ e $h = 1/10$ e rappresentare tutte le soluzioni su uno stesso grafico.
Come si stanno comportando le soluzioni ottenute con EE al diminuire di h?
Si può concludere che le soluzioni ottenute con il metodo di EE stanno convergendo alla soluzione esatta (incognita) del problema?
I due metodi soffrono di instabilità su questo problema specifico e con gli h utilizzati?

Domanda 1. Interpolazione polinomiale di Lagrange:

1. cosa vuol dire interpolare una funzione,
2. scrivere la forma dell'interpolatore globale di Lagrange rispetto alla base dei monomi sipiegare come si calcolano i coefficienti rispetto a questa base;
3. scrivere la forma dell'interpolatore globale di Lagrange rispetto alla base di Lagrange, specificando l'espressione generale delle funzioni di base. In questo caso il grosso del lavoro consiste nel calcolare i coefficienti rispetto alla base di Lagrange oppure altro? Eventualmente cosa?
4. spiegare quali sono gli svantaggi dell'interpolazione nello scegliere nodi equispaziati.

Domanda 2. I metodi di Newton e delle secanti:

1. a cosa servono;
2. scrivere la loro formulazione evidenziando analogie e differenze;
3. quale test d'arresto è opportuno utilizzare per fermare le iterazioni;
4. riportare le proprietà di convergenza dei due metodi.