Cognome e nome ....

Firma...................................Matricola...................................

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`.

Esercizio 1. Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 25 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Punto 1.1. Quali di questi tre metodi: (a) fattorizzazione LU senza pivotazione, (b) fattorizzazione di Cholesky, (c) fattorizzazione LU con pivotazione, possono essere utilizzati per risolvere il sistema? Giustificare esaurientemente la risposta.

Punto 1.2. La matrice A verifica le ipotesi per poter applicare i metodi del gradiente e del gradiente coniugato? Motivare la risposta.

Punto 1.3. Dopo aver scelto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $k_{max} = 200$ e tolleranza per il test d'arresto pari a $\varepsilon = 10^{-6}$, richiamare le function `gradiente.m`, `cg.m` e `bcgstab.m` (tutte scaricabili dalla pagina del corso e con la stessa istruzione di chiamata).
Stampare a video il numero di iterazioni effettuate da ogni metodo e la soluzione calcolata. Quali metodi forniscono un'approssimazione accurata della soluzione del sistema? Motivare la risposta.

Punto 1.4. Rappresentare in scala semilogaritmica i vettori dei residui normalizzati $\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$ (ultima variable di output) ottenuti dal run dei tre metodi e spiegare il comportamento dei tre metodi al crescere delle iterazioni.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 9y = e^{-2t} & t \in [0, 5] \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \sqrt{11}/2 \end{cases} \tag{1}$$

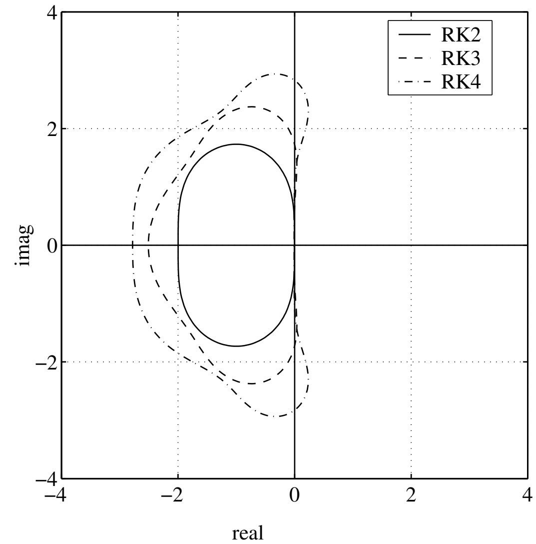
Punto 2.1 Scrivere su carta il sistema vettoriale del primo ordine $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$, associato all'equazione data. Osservando che l'equazione data è lineare, determinare la matrice A e la funzione vettoriale $\mathbf{g}(t)$ tali che $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$.

Punto 2.2 Scrivere un file matlab per la risoluzione numerica del problema dato con il metodo Runge Kutta 3 (`rk3`) con $h = 0.01$. Quindi rappresentare graficamente la soluzione calcolata.

Supponendo che la costante che compare nella formula dell'errore di RK3 sia dell'ordine di 10, stimare l'errore commesso dal metodo.

Punto 2.3

Analizzando il grafico della regione di assoluta stabilità del metodo RK3, stimare il valore reale positivo h_0, tale che RK3 risulti assolutamente stabile per ogni $h \in (0, h_0)$ per la risoluzione di questo problema.
Verificare quanto trovato togliendo il termine forzante $\mathbf{g}(t)$ dall'equazione differenziale e lavorando sull'intervallo $[0, 100]$.



Domanda 1. Formule di quadratura:

1. la formula del punto medio semplice e composita: scrivere la formula e dire come la si è derivata, quindi riportare la stima dell'errore, dicendo che ordine di convergenza e che grado di precisione ha;

2. la formula dei trapezi semplice e composita: scrivere la formula e dire come la si è derivata, quindi riportare la stima dell'errore, dicendo che ordine di convergenza e che grado di precisione ha;

3. operare un confronto tra le due formule e riportare una situazione in cui è possibile utilizzare la formula del punto medio, ma non quella dei trapezi.

Domanda 2. Approssimazione di funzioni e dati nel senso dei minimi quadrati in una dimensione:

1. definire i dati e dire cosa si cerca,
2. formulare il problema nel senso dei minimi quadrati qualora si cerchi una funzione polinomiale di grado 1,
3. cos'è il sistema delle equazioni normali e che proprietà ha la sua matrice?
4. che metodi numerici si possono utilizzare per il calcolo della soluzione del problema dei minimi quadrati?
