Calcolo Scientifico, A.A. 2016/17
Appello del 10 gennaio 2017

Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} x^3 + y - 2x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + 4 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Punto 1.1
Localizzare graficamente le radici reali del sistema (1) e dire se sono radici semplici o multiple.

Punto 1.2
Dopo aver posto la tolleranza del test d'arresto pari a `tol=1.e-10` ed il numero massimo di iterazioni pari a `nmax=100`, si approssimino numericamente le radici dell'equazione (1) con il metodo di Newton (`newtonsys.m`), scegliendo opportunamente e di volta in volta il punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.
Stampare le radici calcolate, il numero di iterazioni richieste per soddisfare il test d'arresto ed il residuo dell'equazione nelle radici calcolate.
I risultati numerici concordano con quanto ci si aspetta dalla teoria? Giustificare la risposta.
Punto 1.3
Spiegare cosa succede al metodo di Newton prendendo $\mathbf{x}^{(0)} = [0; -1/2]$.

Esercizio 2 Si vuole approssimare la funzione

$$f(x) = \arctan(x^2), \qquad x \in [0,1],$$

con i polinomi di Lagrange $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ che interpolano f in $(n+1)$ nodi distinti.

Punto 2.1 Scrivere un file matlab che, al variare di $n = 4 : 4 : 60$:
- costruisca il polinomio di Lagrange $p_n^V(x) \in \mathbb{P}_n$ (costruito con la matrice di Vander Monde) ed il polinomio di Lagrange $p_n^B(x) \in \mathbb{P}_n$ (costruito con la forma baricentrica) interpolanti f in $(n+1)$ nodi equispaziati in $[0,1]$;
- disegni su un grafico la funzione $f(x)$, i nodi (x_i, y_i) (con $i = 0, \ldots, n$) di interpolazione ed i polinomi $p_n^V(x)$ e $p_n^B(x)$ (ripulendo il grafico ad ogni n);
- calcoli gli errori

$$e_n^V = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_n^V(x)|, \qquad e_n^B = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_n^B(x)|. \tag{2}$$

Punto 2.2 Rappresentare su un unico grafico in scala logaritmica gli errori e_n^V e e_n^B al variare di n. Possiamo dire che $\|p_n^V - f\|_\infty \to 0$ e $\|p_n^B - f\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$?
Commentare il grafico ottenuto e giustificare il comportamento delle curve degli errori in base alle proprie conoscenze.

Punto 2.3 È possibile costruire dei polinomi globali di Lagrange p_n^V e p_n^B interpolanti f in $(n+1)$ punti, che convergano (in aritmetica del calcolatore e non solo in aritmetica esatta) ad f quando $n \to \infty$?
In caso affermativo, costruire tali polinomi, calcolare gli errori, come in (2), e rappresentarli su un grafico in scala logaritmica, verificando ciò che è stato affermato.

Esercizio 3 Dati $m > 0$, $R \geq 0$, $K > 0$, $x_0 > 0$, si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{aligned} & mx''(t) + Rx'(t) + Kx(t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ & x(0) = x_0 \\ & x'(0) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

che modella lo spostamento $x(t)$ (rispetto alla condizione di equilibrio) di un punto materiale di massa m lungo una direzione prefissata.
All'istante iniziale il punto si trova in una posizione x_0 non di equilibrio e il suo spostamento è dovuto alla presenza di una forza elastica e di una forza di attrito.
Dopo aver adimensionalizzato l'equazione, consideriamo i seguenti dati: $m = 1$, $R = 0.1$, $K = 0.53$, $x_0 = 10$.

Punto 3.1 Approssimare lo spostamento $x(t)$ con lo schema Eulero esplicito (`eulero_esp.m`) sull'intervallo temporale $[0, 200]$, prendendo passo di discretizzazione $h = 0.01$, $h = 0.1$, $h = 0.18$ e $h = 0.2$; quindi rappresentare graficamente le soluzioni numeriche ottenute.

Punto 3.2 Quale delle 4 soluzioni trovate è più accurata? Perché?
Per quali dei quattro valori di h proposti lo schema di Eulero esplicito è assolutamente stabile? Commentare la risposta.

Punto 3.3 Volendo approssimare lo spostamento $x(t)$ con lo schema RK4 (`rk4.m`), quali h garantiscono assoluta stabilità? Per rispondere, avvalersi della Figura riportata sotto, le regioni di piano all'interno delle curve sono le regioni di assoluta stabilità dei metodi indicati.