Esame scritto di Calcolo Scientifico
9 luglio 2018

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab`.

Esercizio 1. Sia A la matrice di Vandermonde costruita a partire da 10 punti equispaziati sull'intervallo $[0.1, 1.1]$.
Si vuole eseguire la fattorizzazione LU di A sia senza che con la pivotazione per righe, per capire se quest'ultima apporta effettivi vantaggi alla risoluzione di un sistema lineare avente A come matrice.
Definiamo il vettore colonna $\mathbf{b}$ moltiplicando la matrice A per il vettore colonna `xex=(1:10)'` e consideriamo il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Punto 1.1. Utilizzando la function `lufact`, calcolare la fattorizzazione LU di A senza eseguire la pivotazione, quindi calcolare la soluzione del sistema (1), denotando con $\hat{\mathbf{x}}_0$ la soluzione ottenuta.
Punto 1.2. Sempre utilizzando la function `lufact`, calcolare la fattorizzazione LU di A con pivotazione per righe, quindi calcolare la soluzione del sistema (1), denotando con $\hat{\mathbf{x}}_1$ la soluzione ottenuta.
Punto 1.3. Sapendo che la soluzione esatta del sistema (1) è il vettore $\mathbf{x} = [1, 2, \dots, 10]^T$, calcolare gli errori

$$e_0 = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad e_1 = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_1\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

e confrontarli. A cosa è dovuto il fatto che e_0 è di gran lunga maggiore di e_1?
Punto 1.4. Calcolare il numero di condizionamento di A, dire se A è bene o mal condizionata e verificare che l'errore e_1 soddisfa la stima a priori

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_1\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A)\left(\frac{\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right),$$

prendendo come unici errori sui dati quelli dovuti all'arrotondamento di macchina.

Esercizio 2 Un drone che deve effettuare delle riprese aeree decolla da terra e segue una traiettoria ad elica conica descritta dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) = t\cos(t), & 0 \leq t \leq 20 \\ y(t) = t\sin(t) \\ z(t) = t. \end{cases} \tag{2}$$

Si vuole calcolare numericamente la lunghezza del percorso effettuato dal drone in 20 secondi.
Punto 2.1. Utilizzando il comando `plot3` (che serve per disegnare curve nello spazio), rappresentare graficamente la traiettoria (2) del drone per valori di $t \in [0, 20]$.
Punto 2.2. Ricordando che la lunghezza di una curva $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$ con $t \in [t_a, t_b]$ è data dalla formula

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt, \tag{3}$$

calcolare numericamente la lunghezza del percorso effettuato dal drone. A tal proposito utilizzare il metodo del punto medio composito (si utilizzi `pmedioc.m`) con un numero M di intervalli tale da garantire un errore dell'ordine di 10^{-2}. Spiegare il ragionamento svolto per giungere alla scelta di M.

Punto 2.3. Non conoscendo il valore esatto dell'integrale (3), è possibile stimare a priori l'errore commesso al punto precedente? Giustificare esaurientemente la risposta data ed, in caso affermativo, fornire una stima dell'errore.

Esercizio 3 Si vuole risolvere numericamente il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\begin{cases} 5 \cdot 10^{-3} y''(t) + 10^{-2} y'(t) + 5 \cdot 10^{-2} y(t) = 5e^{-t} \sin(10t), & t \in (0, 10) \\ y(0) = 0.1, \ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Punto 3.1. Dopo aver riscritto il problema di Cauchy dato come un problema vettoriale del primo ordine, scrivere un `m-file` che:

- definisca i dati iniziali,
- richiami lo schema Runge-Kutta 2 (`rk2.m`) e lo schema Runge Kutta 4 (`rk4.m`) per la risoluzione del sistema dato utilizzando $h = 1/100$,
- rappresenti graficamente la soluzione del sistema e dire quale dei due schemi fornisce la soluzione più accurata (giustificare la risposta).

Punto 3.2. Calcolare le soluzioni numeriche di entrambi gli schemi utilizzando $h \in \{0.1, 0.5, 0.8\}$ e, per ciascuno dei valori di h considerati, dire se gli schemi sono assolutamente stabili o meno nella risoluzione del problema dato.

Punto 3.3. Facendo riferimento alle regioni di assoluta stabilità dei metodi utilizzati, per ognuno dei due metodi determinare il valore h_0 (con una sola cifra decimale) tale che per ogni $h < h_0$ lo schema risulti assolutamente stabile nel risolvere il problema dato.