Esame scritto di Calcolo Scientifico
4 settembre 2018

Tutte le function sono scaricabili dalla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab`.

Esercizio 1. Siano

$$G = \begin{bmatrix} 1/20 & 1/20 & 19/60 & 1/5 \\ 9/20 & 1/20 & 19/60 & 1/4 \\ 9/20 & 1/20 & 1/20 & 1/5 \\ 1/20 & 17/20 & 19/60 & 1/6 \end{bmatrix}, \qquad A = G^T G.$$

Punto 1.1. Elencare i metodi (diretti e iterativi) visti a lezione che possono essere utilizzati per calcolare il vettore $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, essendo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ un vettore assegnato.

Punto 1.2. Si vorrebbe risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, di cui però non si conosce il vettore termine noto $\mathbf{b}$ esatto, bensí una sua approssimazione $\widehat{\mathbf{b}} = [0.762;\ -0.292;\ 0.304;\ 0.388]$.
Risolvere il sistema $A\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{b}}$ con il metodo del gradiente coniugato (utilizzare `cg.m`, scaricandolo dalla pagina del corso, oppure `pcg` di MATLAB) con tolleranza pari a 10^{-12} e kmax=20.
Fornire la soluzione calcolata e dire se la convergenza è raggiunta nel numero di iterazioni previsto dalla teoria, commentando la risposta.

Punto 1.3. Sapendo che il vettore $\widehat{\mathbf{b}}$ approssima il vettore $\mathbf{b}$ con un errore relativo pari a 0.1%, produrre una stima dell'errore che si commette nell'accettare $\widehat{\mathbf{x}}$ come approssimazione del vettore $\mathbf{x}$.

Esercizio 2. Si vuole approssimare la funzione

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \cos(\pi x) \tag{1}$$

con l'interpolatore lineare composito $p_1^c(x)$ che interpola f in $(n+1)$ nodi equispaziati in un intervallo $[a, b] \subset \mathrm{dom}(f)$.

Punto 2.1. Costruire $p_1^c(x)$ che interpola f in 51 nodi equispaziati nell'intervallo $[a, b] = [0, 2]$ e rappresentarlo graficamente insieme alla funzione $f(x)$.
Dire in quale zona dell'intervallo $[0, 2]$ si verifica la massima differenza tra f e p_1^c e perché.
Calcolare l'errore $\|f - p_1^c\|_\infty$ utilizzando 1000 punti equispaziati in $[0, 2]$.

Punto 2.2. Per ogni $n = 10 : 10 : 500$, costruire $p_1^c(x)$ che interpola f in $n + 1$ punti equispaziati nell'intervallo $[a, b] = [0, 2]$ e calcolare l'errore $\|f - p_1^c\|_\infty$ utilizzando 1000 punti equispaziati.
Denotando con H la distanza tra due punti successivi dell'interpolazione, rappresentare su un grafico in scala logaritmica gli errori calcolati al variare di H.
Gli errori tendono a zero come H^2 quando $H \to 0$, come è tipico dell'interpolatore lineare composito? Commentare il risultato ottenuto.

Punto 2.3. Determinare il minimo numero di nodi (equispaziati) di interpolazione per cui p_1^c approssima f a meno di un errore in norma infinito pari a 10^{-3} sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 3 Si vogliono calcolare le funzioni $v = v(t)$ e $w = w(t)$ soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = 100(-w + v(1-v)(v-0.1) + 0.08), \quad t \in [0,2] \\ w' = v - 0.5w \\ v(0) = 0, \ w(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Punto 3.1. Scrivere un `m-file` in cui si definiscono i dati e si risolve il problema (2) con lo schema RK4 (`rk4.m`) e $h = 0.001$. Rappresentare graficamente v e w su uno stesso grafico.
Pur non conoscendo l'espressione della soluzione esatta, possiamo dare una stima dell'ordine di grandezza dell'errore tra la soluzione calcolata e quella esatta (a meno di una costante moltiplicativa). Fornire questa stima giustificando la risposta.

Punto 3.2. Sia `NH=[20,80,120]`. Per ogni valore N_h del vettore `NH` (N_h rappresenta il numero di passi da svolgere per approssimare la soluzione numerica e coincide con l'ultimo parametro di input delle function `rk4, rk2`, ecc.):

- calcolare la soluzione numerica con il metodo RK2 (`rk2.m`) e plottare le due componenti v e w della soluzione su uno stesso grafico;
- calcolare la soluzione numerica con il metodo di Crank Nicolson (`cranknicolson_s.m`, serve anche `broyden.m`) e plottare le due componenti v e w della soluzione su uno stesso grafico;
- confrontare le soluzioni numeriche ottenute con RK2 e Crank-Nicolson con quella di riferimento ottenuta con RK4 e dire se le prime due sono o meno una buona approssimazione della soluzione di riferimento. Commentare anche pensando alle proprietà intrinseche dei metodi: accuratezza e stabilità assoluta.

Punto 3.3. Sia `NH=[20:20:200,250:50:500]`. Per ogni valore N_h del vettore `NH`:

- calcolare la soluzione numerica con il metodo RK4 (essa rappresenta la nostra soluzione di riferimento in alternativa a quella esatta che non conosciamo);
- calcolare la soluzione numerica con il metodo RK2 (`rk2.m`) e l'errore e_h^{RK2} in norma infinito tra la soluzione RK2 e la soluzione RK4 (solo per la variabile v);
- calcolare la soluzione numerica con il metodo di Crank Nicolson (`cranknicolson_s.m`, serve anche `broyden.m`) e l'errore e_h^{CN} in norma infinito tra la soluzione Crank Nicolson e la soluzione RK4 (solo per la variabile v).

Punto 3.4. Rappresentare sul medesimo grafico in scala logaritmica gli errori e_h^{RK2} e e_h^{CN} al variare di $h = 2/N_h$.
I metodi convergono per $h \to 0$? Se sì, dire con quale ordine e giustificare la risposta.
I risultati numerici concordano con la teoria o no? Giustificare la risposta data.