Calcolo Numerico, A.A. 2013/14
Appello 3 settembre 2014

Esercizio 1
Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove la matrice A e il termine noto $\mathbf{b}$ sono

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 14 \\ 17 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1.a) La matrice soddisfa le condizioni sufficienti affinché i metodi del gradiente e del Gradiente Coniugato convergano? Giustificare esaurientemente la risposta.

1.b) Risolvere il sistema lineare con i metodi del Gradiente, del Gradiente Coniugato ed il BiCGStab, prendendo un vettore iniziale di numeri casuali e la tolleranza per il test d'arresto pari a 10^{-12}.
Si utilizzino le function `gradiente.m`, `gc.m` e `bcgstab.m` che si trovano alla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/MATLAB`.
Plottare su uno stesso grafico le storie di convergenza dei tre metodi e dire quale dei tre metodi risulta più efficiente nella risoluzione del sistema dato.
Quanto trovato numericamente riflette quanto è affermato dalla teoria? Giustificare esaurientemente la risposta.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - 2x^2, \qquad x \in [0, 2], \tag{2}$$

sia n un numero intero positivo, $H = 2/n$ e $p_1^c(x)$ il polinomio interpolatore composito lineare che interpola f nei nodi equispaziati $x_i = i * H$, per $i = 0, ..., n$.
2.a) Ricordando che la stima teorica dell'errore dell'interpolazione lineare composita afferma che, se $f \in C^2([x_0, x_n])$, allora

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p_1^c(x)| \leq CH^2 \max_{x\in[x_0,x_n]} |f''(x)|$$

con $C = 1/8$, calcolare il minimo numero di nodi di interpolazione per cui l'errore di interpolazione

$$E_1^H(f) := \max_{x\in[0,2]} |p_1^c(x) - f(x)| \tag{3}$$

sia minore o uguale a 10^{-4}.
2.b) Verificare sperimentalmente quanto trovato al punto precedente, valutando l'errore su 1000 nodi equispaziati nell'intervallo $[0, 2]$.