Calcolo Numerico, A.A. 2013/14
Appello 3 settembre 2014

Esercizio 1
Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove la matrice A e il termine noto $\mathbf{b}$ sono

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 14 \\ 17 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1.a) La matrice soddisfa le condizioni sufficienti affinché i metodi di Jacobi, di Gauss-Seidel e del Gradiente Coniugato convergano? Giustificare esaurientemente la risposta.

1.b) Risolvere il sistema lineare con i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel e Gradiente Coniugato non precondizionato, prendendo un vettore iniziale di numeri casuali e la tolleranza per il test d'arresto pari a 10^{-12}.
Per Jacobi e GS utilizzare il file
`http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/itermeth1.m`,
per Gradiente Coniugato utilizzare la function `pcg.m` di Matlab.
Plottare su uno stesso grafico le storie di convergenza dei tre metodi e dire quale dei tre metodi risulta più efficiente nella risoluzione del sistema dato.
Quanto trovato numericamente riflette quanto è affermato dalla teoria? Giustificare esaurientemente la risposta.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - 2x^2, \qquad x \in [0, 2], \tag{2}$$

sia n un numero intero positivo, $H = 2/n$ e $p_1^c(x)$ il polinomio interpolatore composito lineare che interpola f nei nodi equispaziati $x_i = i * H$, per $i = 0, ..., n$.
2.a) Ricordando che la stima teorica dell'errore dell'interpolazione lineare composita afferma che, se $f \in C^2([x_0, x_n])$, allora

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p_1^c(x)| \le CH^2 \max_{x\in[x_0,x_n]} |f''(x)|$$

con $C = 1/8$, calcolare il minimo numero di nodi di interpolazione per cui l'errore di interpolazione

$$E_1^H(f) := \max_{x\in[0,2]} |p_1^c(x) - f(x)| \tag{3}$$

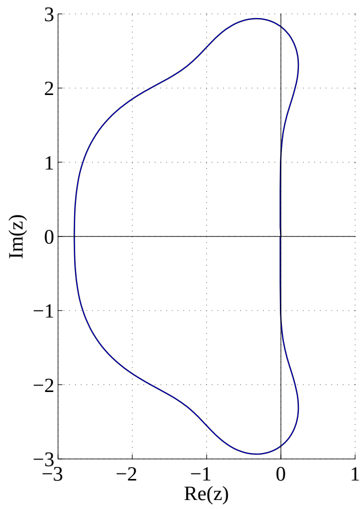

Figure 1: La regione di assoluta stabilità di Runge Kutta è la parte di piano interna alla curva chiusa

sia minore o uguale a 10^{-4}.
2.b) Verificare sperimentalmente quanto trovato al punto precedente, valutando l'errore su 1000 nodi equispaziati nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 3 Si consideri il seguente problema di Cauchy del terzo ordine:

$$\begin{cases} y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0 \quad t \in (0, 40) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 4. \end{cases} \tag{4}$$

3.a) Dopo aver riscritto il problema di Cauchy dato come un problema vettoriale del primo ordine, scrivere un `m-file` che:
- definisca i dati iniziali,
- richiami lo schema di Eulero esplicito (`feuler.m`) e lo schema Runge Kutta 4 (`rk4.m`) per la risoluzione del sistema dato,
- rappresenti graficamente la soluzione del sistema. Si utilizzi $h = 0.1$.
Quale delle due soluzioni sarà più accurata? Perchè?
3.b) Facendo riferimento alle regioni di assoluta stabilità dei metodi utilizzati (si veda la figura per RK4) ed alla teoria studiata, determinare il massimo valore del passo temporale h tale da garantire assoluta stabilità nei due casi. Verificare sperimentalmente quanto ottenuto.