Calcolo Numerico - A.A. 2013/14
Appello 3 febbraio 2014

Esercizio 1 Si vuole risolvere numericamente l'equazione non lineare

$$x^2 - log(x) = 2 \tag{1}$$

nell'intervallo $(0, 2)$.

Punto 1.1
Localizzare graficamente le radici dell'equazione (1).
Dopo aver posto la tolleranza del test d'arresto `tol=1.e-8` ed il numero massimo di iterazioni `nmax=20`, scelti dei punti iniziali $x^{(0)}$ opportuni, calcolare tutte le radici dell'equazione (1) con il metodo di Newton o delle secanti (utilizzare le proprie function).

Punto 1.2
Si considerino le seguenti funzioni di punto fisso:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\log(x) + 2}, \qquad \varphi_2(x) = e^{x^2-2}. \tag{2}$$

Verificare graficamente che le radici di (1) coincidono con i punti fissi di φ_1 e φ_2.
Sempre dall'analisi del grafico delle funzioni φ_1 e φ_2, dedurre se i metodi di punto fisso costruiti con φ_1 e φ_2 convergeranno o meno alle radici di (1) (e in caso affermativo con quale ordine) e giustificare le risposte.

Punto 1.3
Utilizzando una function che implementa il metodo di punto fisso, verificare le conclusioni ottenute al punto precedente, riportando (in caso di convergenza) il numero di iterazioni effettuate dal metodo di punto fisso ed il valore numerico delle radici trovate. Fissare tolleranza e numero massimo di iterazioni come nel punto 1.1 e scegliere opportunamente il punto $x^{(0)}$.

Esercizio 2 Si vuole calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx. \tag{3}$$

Punto 2.1
Si scelga uno dei metodi studiati durante il corso per approssimare l'integrale dato.
Non conoscendo il valore dell'integrale esatto, si chiede di calcolare diverse approssimazioni dell'integrale (3) utilizzando un numero M di nodi di quadratura, con $M \geq 10$. Indicando con I_M l'integrale approssimato con M nodi, fermarsi al primo $\widetilde{M}$ per cui, $|I_{\widetilde{M}} - I_{\widetilde{M}-1}| \leq 10^{-7}$.
Quanto vale $\widetilde{M}$ e qual è il valore corrispondente dell'integrale calcolato?

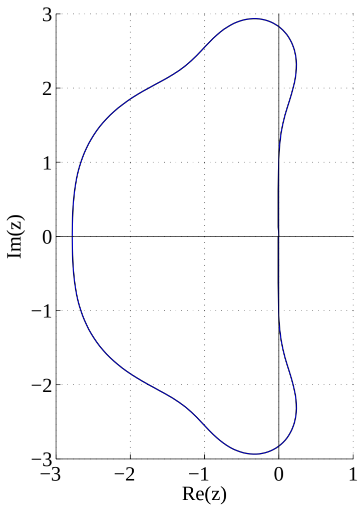

Figure 1: La regione di assoluta stabilità del metodo RK4 è la parte di piano interna alla curva chiusa

Esercizio 3 Si vuole approssimare la soluzione del problema di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} 2x''(t) + 0.5x'(t) + 0.53x(t) = sin(t), \quad t \in (0, 300) \\ x(0) = 10, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Punto 3.1. Determinare per via teorica limitazioni su h affinché il metodo di Eulero esplicito risulti assolutamente stabile sul problema dato. Verificare numericamente quanto trovato, calcolando la soluzione numerica con alcuni valori di h maggiori e minori di h_0. (Ricordare che l'assoluta stabilità si studia sul problema omogeneo.)

Punto 3.2. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy (4) con il metodo di Eulero esplicito ed $h = 0.1$ e plottare la soluzione ottenuta.

Punto 3.3
In Figura 1 è rappresentata la regione di assoluta stabilità del metodo RK4. Sfruttando la definizione di regione di assoluta stabilità e partendo da questa figura, determinare in maniera approssimativa (con due cifre decimali) il valore $h_0 > 0$ tale che il metodo RK4 risulti assolutamente stabile per ogni $0 < h < h_0$ quando viene applicato al problema (4).
Quindi verificare quanto trovato su carta, calcolando la soluzione numerica con alcuni valori di h maggiori e minori di h_0.

Punto 3.4. Calcolare la soluzione di (4) con RK4 e $h = 0.1$ e plottarla. Confrontare le soluzioni ottenute con RK4 e Eulero esplicito con $h = 0.1$.
Quale delle due è più accurata? Perchè?