Calcolo Scientifico, Calcolo Numerico, A.A. 2014/15
Appello 2 settembre 2015

Esercizio 1
Si vuole risolvere numericamente il sistema non lineare

$$\begin{cases} x - c(cos(x) - sin(y)) = 0 \\ cx - y - c\sin(y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

essendo $c \in \mathbb{R}$ un parametro.
1.a) Localizzare graficamente le radici del sistema (1) che cadono all'interno del quadrato $\Omega = [-3, 3]^2$ prendendo prima $c = 1$ e poi $c = 0.3$.
Dopo aver posto la tolleranza del test d'arresto `tol=1.e-10` ed il numero massimo di iterazioni `nmax=100`, scelto un punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ opportuno e $c = 1$, calcolare le radici del sistema (1) con il metodo di Newton (utilizzare la propria function o quella presente alla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab`). Riportare la soluzione ottenuta ed il numero di iterazioni effettuate dal metodo per giungere a convergenza. I risultati ottenuti confermano quanto ci si aspetta dalla teoria?
1.b) Riscrivere il sistema (1) come un'equazione di punto fisso vettoriale

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}) \tag{2}$$

definendo opportunamente Φ a partire dal sistema dato, e $\mathbf{x} = [x, y]^T$.
1.c) Determinare (su carta) condizioni sufficienti sul parametro c affinchè il metodo di punto fisso converga. Rispetto al caso di un'equazione scalare, sostituire $|\phi'(x)|$ con $\|J_\Phi(\mathbf{x})\|_\infty$ essendo $J_\Phi(\mathbf{x})$ la matrice Jacobiana di Φ valutata nel punto $\mathbf{x}$ e, se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definiamo $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
1.d) Risolvere l'equazione (2) con il metodo di punto fisso, utilizzando la propria function (o quella che si trova alla pagina `paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab`) adattandola al caso di equazioni vettoriali. Si consideri prima $c = 0.3$ e poi $c = 1$. Commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 2 Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{2} \cos(5(x^2 - x))dx \tag{3}$$

con le formule di Simpson adattivo e di Simpson composito.
Un valore sufficientemente accurato dell'integrale esatto è calcolabile con la function `quad_gl.m` (scaricabile da `paola-gervasio/CS/matlab`, vedere l'help).
Utilizzare l'output di `quad_gl` con `np=30` come valore di riferimento di I.
2.a) Approssimare I con la formula di Simpson adattiva (usare la propria function o quella presente sul sito del corso) prendendo tolleranza $tol = 10^{-4}$ e $h_{min} = 10^{-4}$. Riportare l'integrale calcolato, l'errore rispetto ad I e il numero di nodi utilizzati dalla formula.

2.b) Approssimare I con la formula di Simpson composita prendendo numero di intervalli $M = 10 : 10 : 300$. Anzitutto verificare l'ordine di convergenza teorico del metodo di Simpson composito, quindi determinare il valore di M che produce un integrale approssimato con un errore il più possibile vicino a quello ottenuto con la formula di Simpson adattiva. Quale delle due formule risulta più efficiente?

Esercizio 3 Caricare in memoria il contenuto del file `dati_es3_020915.mat` con il comando `load dati_es3_020915`.
I vettori `x` e `y` contengono i punti (x_i, y_i) per $i = 1, \ldots, 40$.
Costruire il polinomio $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ che meglio approssima i dati (x_i, y_i) nel senso dei minimi quadrati e rappresentarlo graficamente insieme ai punti dati.
Si sa che il grado n del polinomio è compreso tra 2 e 7, ma è incognito. In base al confronto grafico tra i dati ed il polinomio costruito ed in base ai valori ottenuti dei coefficienti a_k, scegliere il valore corretto di n e giustificare la scelta fatta.
Valutare infine il residuo $r_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{40} (y_i - p_n(x_i))^2 \right)^{1/2}$ in corrispondenza del valore n scelto.