Calcolo Numerico (A), A.A. 2011/12
Appello 2 febbraio 2012

Esercizio 1 Sia n un intero positivo e $h = 1/n$.
Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tale che

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= -1/h^2 \quad \text{per } i = 2 : n-1 \\ A_{ii} &= 2/h^2 \quad \text{per } i = 1 : n-1 \\ A_{i,i+1} &= -1/h^2 \quad \text{per } i = 1 : n-2. \end{aligned}$$

Punto 1.1
Scrivere un m-file in cui si costruisce la matrice A per $n = 5 : 5 : 100$. Vista la natura sparsa della matrice, utilizzare il formato sparso di Matlab. Per gli stessi valori di n calcolare il numero di condizionamento $K(A)$ e rappresentare su un grafico l'andamento di $K(A)$ al variare di n.

Punto 1.2
Si sa che esistono $C \in \mathbb{R}^+$ e $p \in \mathbb{N}$ tali che $K(A) = Cn^p$. Proporre un metodo per calcolare C e p ed implementarlo. Determinare i valori di C e p.

Punto 1.3
Si fissi ora $n = 50$, $h = 1/n$. Sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ con $b_j = sin(\pi jh)$ per $j = 1, \ldots, n-1$, risolvere il sistema lineare $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ con una fattorizzazione che tenga conto delle proprietà della matrice A e generare un grafico con il vettore $\mathbf{u}$ in ordinata ed il vettore $\mathbf{x}$ (così definito: $x_j = jh$ per $j = 1, \ldots, n-1$) in ascissa.

Esercizio 2 Si vuole calcolare numericamente la radice dell'equazione

$$f(x) = e^x - 2/(1 + x^2) \tag{1}$$

con un metodo di punto fisso.

Punto 2.1 Si consideri la funzione di punto fisso $\varphi(x) = \log\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$. Dire se essa è adeguata per il calcolo della radice della funzione $f(x)$ assegnata e confermare le proprie affermazioni richiamando la function `http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/ptofisso.m`. Si prendano `tol`$= 10^{-6}$ e `nmax`=100.

Esercizio 3 Si vuole risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = e^t \quad \text{per } t \in [0,1] \\ y(0) = 12/11. \end{cases} \tag{2}$$

Punto 3.1 Scrivere un `m-file` in cui:
- si definiscano i dati iniziali,
- si richiami la function (`http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab/schema.m`) per approssimare la soluzione del problema di Cauchy;
- si rappresenti graficamente la funzione $y(t)$.

Risolvere il problema dato con $h = 0.01$ e rappresentare graficamente la soluzione ottenuta.

Punto 3.2
Determinare numericamente l'ordine di convergenza del metodo implementato nella function `schema.m` sapendo che la soluzione esatta del problema dato è $y(t) = e^{-10t} + e^t/11$.

Punto 3.2
Determinare numericamente condizioni su h affinché il metodo implementato in `schema.m` sia assolutamente stabile per la risoluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \quad \text{per } t \in [0,100] \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$