Quanto è accurata la soluzione di un sistema lineare

Il nostro obiettivo è risolvere

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

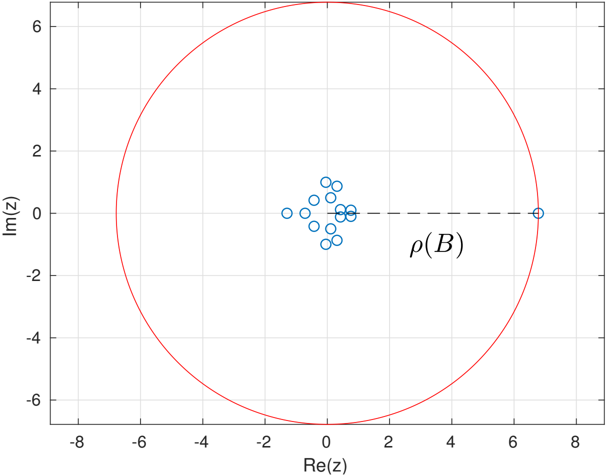
In realtà quando lavoriamo al calcolatore, gli elementi di A e di $\mathbf{b}$ vengono approssimati con i loro rappresentanti di macchina, quindi i nostri dati diventano $\hat{A} = A + \delta A$ e $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$.
Di conseguenza troveremo la soluzione $\hat{\mathbf{x}}$ del sistema perturbato

$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}.$$

$\mathbf{x}$ = soluzione esatta, $\hat{\mathbf{x}}$ = soluzione approssimata.
Vogliamo stimare l'errore relativo sulla soluzione esatta

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Raggio spettrale di una matrice



$$\rho(B) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(B)| \qquad \text{raggio spettrale di } B \tag{1}$$

e $\lambda_i(B)$ sono gli autovalori della matrice B.

Norma di matrice e Numero di condizionamento

Siano A e B matrici in $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Norma di matrice: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to [0, +\infty)$:

1. $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (positività);
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ (omogeneità);
3. $\|A\| + \|B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (dis. triangolare).

$$\text{Norma 2:} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\text{Norma } \infty\text{:} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\text{Norma 1:} \qquad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Numero di condizionamento di una matrice A:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Si ha $K(A) \geq 1$ per ogni matrice A.

Stima a priori

Ricordo che $\delta A = A - \hat{A}$.

Teorema. Se $\|\delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$, allora vale la seguente stima:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A) \left(\frac{\|A - \hat{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right).$$

$\left(\frac{\|A - \hat{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$ è l'errore sui dati.
$K(A)$ è il fattore di amplificazione dell'errore sui dati.

Posso stimare l'errore sulla soluzione ancor prima di risolvere il sistema lineare, semplicemente conoscendo l'errore sui dati ed il condizionamento di A.

Matrici bene e mal condizionate

Fissato l'errore sui dati, maggiore è $K(A)$ e maggiore sarà l'errore sulla soluzione.

- se $\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ e $\dfrac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \sim \epsilon_M \sim 10^{-16}$ e $K(A) \lesssim 10^5 \Rightarrow \dfrac{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \sim 10^{-11}$,
- se $\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ e $\dfrac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \sim \epsilon_M \sim 10^{-3}$ e $K(A) \lesssim 10^5 \Rightarrow \dfrac{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \lesssim 10^2$!!!!,

Se $K(A) \lesssim 10^2$ diciamo che A è ben condizionata, altrimenti diciamo che A è mal condizionata.

A ben condizionata: a piccoli errori sui dati corrispondono piccoli errori sulla soluzione del sistema lineare.
A mal condizionata: a piccoli errori sui dati possono corrispedere GROSSI errori sulla soluzione del sistema lineare.

Per calcolare $K(A)$ il comando di MATLAB è: `cond(A)`.

In realtà possiamo solo calcolare $K(\hat{A})$ e non $K(A)$.

Esempio di matrice molto mal condizionata

La matrice di Hilbert (di dimensione n) è

$$A = H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}.$$

In matlab: `n=6; A=hilb(n); K=cond(A)`

Se supponiamo che gli unici errori sui dati siano quelli di arrotondamento, cioè dell'ordine di $\mathtt{u} \simeq 10^{-16}$, allora la **stima a priori** dice:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \lesssim K(A)\mathtt{u}.$$

1. Prendere `b=A*ones(n,1)` (equivale a dire che la soluzione esatta è $\mathbf{x} = [1, \dots, 1]^T$),
2. risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
3. calcolare l'errore relativo sulla soluzione esatta e verificare la validità della stima a priori.