Metodo del Gradiente

Dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$\mathbf{x}^{(0)}$ dato; $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$; $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$; $k = 0$, $err = tol + 1$

while $k < kmax$ && $err > tol$

calcolo $\alpha_k = \frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A\mathbf{d}^{(k)}}$

calcolo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$

calcolo $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{d}^{(k)}$

pongo $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)}$;

calcolo $err = \|\mathbf{r}^{(k+1)}\|/\|\mathbf{b}\|$

$k = k + 1$

end

Scrivere la function `gradiente.m` con:

Input: `A, b, x0, tol, kmax`

Output: `x, res, k, resv`, dove: `res=`$\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$, e `resv` è il vettore contenente $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ per ogni k.

Esercizio 1

Si risolva il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 3 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Sapendo che A è simmetrica e definita positiva, risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodi del Gradiente.
Prendere un vettore iniziale di numeri casuali `x0=rand(5,1)`, tolleranza `tol=1.e-12` e numero massimo di iterazioni `kmax=500`.
Rappresentare su un grafico in scala semilogaritmica la storia di convergenza del metodo (ovvero il vettore degli errori).

Metodo del Gradiente Coniugato

Dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{x}^{(0)} \quad \text{dato}; \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}; \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} \\
k = 0,\ err = tol + 1 \\
\text{while } k < kmax \ \&\& \ err > tol \\
\quad \text{calcolo } \alpha_k = \frac{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A \mathbf{d}^{(k)}} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } \beta_k = \frac{(A\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k+1)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T A \mathbf{d}^{(k)}} \\
\quad \text{calcolo } \mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{d}^{(k)} \\
\quad \text{calcolo } err = \|\mathbf{r}^{(k+1)}\| / \|\mathbf{b}\| \\
\quad k = k + 1 \\
\text{end}
\end{array}
$$

Scrivere la function `gradiente_coniugato.m` con:
Input: `A, b, x0, tol, kmax`
Output: `x, res, k, resv`, dove: `res=`$\|\mathbf{r}^{(k)}\|/\|\mathbf{b}\|$, e `resv` è il vettore contenente $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ per ogni k.

Esercizio 2

Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 3 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Sapendo che A è simmetrica e definita positiva, risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo del Gradiente Coniugato.
Prendere un vettore iniziale di numeri casuali `x0=rand(5,1)`, tolleranza `tol=1.e-12` e numero massimo di iterazioni `kmax=500`.
Confrontare la storia di convergenza del metodo GC con quella del metodo del gradiente.

Convergenza del metodo del gradiente

Teorema 1. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è simmetrica e definita positiva, allora il metodo del Gradiente converge alla soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per ogni $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, quando $k \to \infty$ e l'errore $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ (con $k = 0, \ldots, n$) soddisfa la stima

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \qquad k = 1, \ldots$$

dove $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{\mathbf{v}^T A\mathbf{v}}$ e dove $K(A)$ è il numero di condizionamento della matrice A.

Osservazione. Maggiore è $K(A)$, maggiore è $\rho = \frac{K(A)-1}{K(A)+1}$ e minore è la riduzione dell'errore tra un passo e il successivo.

Convergenza del metodo del Gradiente Coniugato

Teorema 2. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è simmetrica e definita positiva, allora in aritmetica esatta il metodo del Gradiente Coniugato converge alla soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al più in n iterazioni e vale la stima

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \qquad k = 1, \ldots$$

dove $c = \dfrac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1}$ e dove $K(A)$ è il numero di condizionamento della matrice A.

Osservazione. Quando n è molto grande si accetta una soluzione approssimata al primo passo k che soddisfa il test d'arresto, anche se $k \ll n$.