Implementazione della formula di Simpson composita

Scrivere la function `simpsonc.m` che implementa la formula di quadratura di Simpson composita con M sottointervalli di uguale ampiezza H:

$$I_s^c = \frac{H}{6} \sum_{k=1}^{M} [f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)]$$

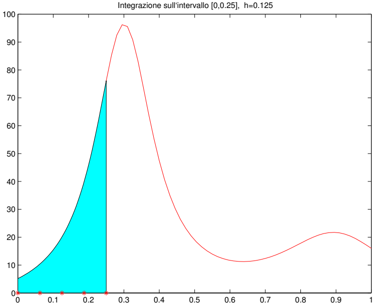
con $H = (b-a)/M$ e $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$

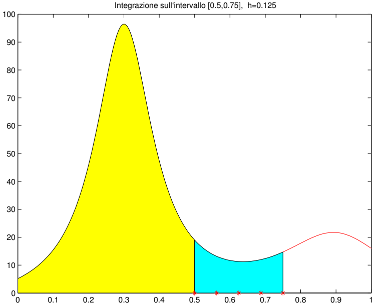
Input: f, a, b, M
Ouput: Isc = approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$.

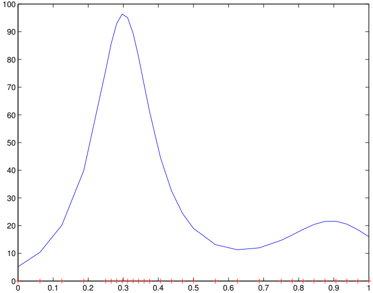
Per verificare la correttezza della function:

1. verificare che integra esattamente i monomi di grado 0,1,2,3
2. verificare che, se $f \notin \mathbb{P}_3$, l'errore decresce come H^4 per $H \to 0$ (provare con due funzioni diverse, su due intervalli diversi, per escludere errori dovuti a casi particolari).

Formula adattiva di Simpson




Integrazione sull'intervallo [0.5,0.75], h=0.125
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Algoritmo (adaptive Simpson)

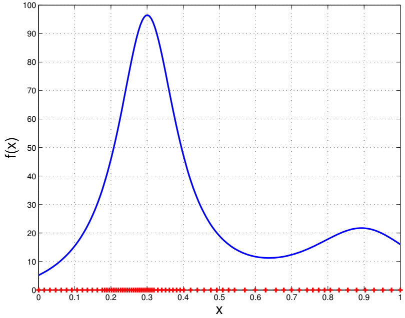
```
Input: f, a, b, tol, hmin
Output: isa, nodi
alpha=a; beta=b; isa=0; nodi=[ ];
while (beta − alpha) > 0 do
    calcolo I1=simpsonc(f,alpha,beta,1);
    calcolo I2=simpsonc(f,alpha,beta,2);
    calcolo stimatore=1/15 |I1 − I2|;
    if stimatore > tol/2 (beta−alpha)/(b−a) and (beta − alpha) > hmin then
        % dimezzo l'intervallo attivo
        beta=(beta+alpha)/2
    else
        % accetto I2 come approssimazione di ∫_α^β f(x)dx
        isa=isa+I2;
        nodilocali=....; nodi=[nodi, nodilocali];
        % modifico [alpha,beta]
        alpha=beta, beta=b;
    end
end
nodi=unique(nodi);
```

```
[Isa,nodi]=simpad(f,a,b,tol,hmin);
Input:
f       = funzione integranda
a,b     = estremi intervallo
tol     = accuratezza del calcolo dell'integrale
hmin    = passo minimo
Output:
Isa     = integrale calcolato
nodi    = vettore dei nodi di quadratura utilizzati
```

Dopo la chiamata alla function rappresentare graficamente il vettore `nodi` e la funzione integranda e vedere dove i nodi sono localizzati.

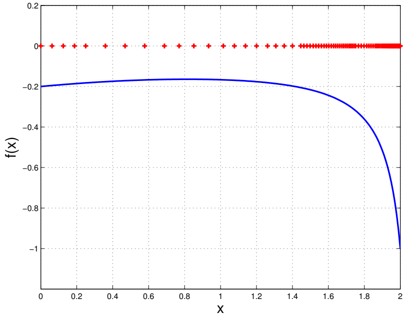
ESEMPIO 1

$$a = 0,\ b = 1,\ tol = 1.e-3$$
$$f(x) = \frac{1}{(x-.3)^2+.01} + \frac{1}{(x-.9)^2+0.04} - 6$$



ESEMPIO 2

$a = 0,\ b = 2, tol = 1.e - 6$
$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x - 5}.$
Si ha $f^{(4)}(2) = -284544$, quindi la formula adattiva genera passi molto piccoli nell'intorno sinistro di $b = 2$.



Comandi Matlab: integral è una formula adattiva in cui:
I_1 è calcolato con una formula di quadratura gaussiana con 7 nodi,
I_2 è calcolato con una formula di quadratura con 15 nodi (i 7 di Gauss + altri 8 di Kronrod)
La sintassi è: `q = integral(fun,xmin,xmax)`,

```
f=@(x)1./(x.^3-2*x-5);
I=integral(f,0,2)
```

o

```
f=@(x)1./(x.^3-2*x-5);
I=integral(f,0,2,'AbsTol',1.e-5)
```

N.B. Di default `AbsTol=1.e-10`.