Formule di quadratura interpolatorie

Data $f \in C^0([a,b])$ a valori reali, si vuole calcolare

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

e lo si approssima con

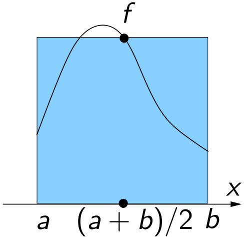
$$I_{appx} = \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i$$

dove $\tilde{f}(x)$ è un interpolatore di f nei nodi x_i in $[a,b]$.

x_i sono detti nodi di quadratura (e sono anche i nodi in cui $\tilde{f}$ interpola f)
w_i sono detti pesi di quadratura

Una fdq si dice aperta se i nodi di quadratura sono interni all'intervallo di integrazione (a,b), chiusa se gli estremi dell'intervallo di integrazione sono nodi di quadratura.

Formula del Punto Medio



$$I_{pm} = (b-a) f[(a+b)/2]$$

È una formula aperta in cui $\tilde{f}(x)$ è la retta costante che interpola f nel punto medio dell'intervallo:

$x_0 = (a+b)/2$ e $w_0 = (b-a)$

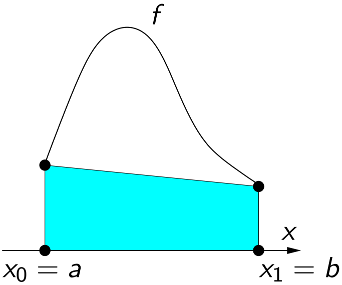
$$I - I_{pm} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Grado di esattezza=1

Il grado di esattezza di una f.d.q. è il massimo grado polinomiale q per cui l'integrale di un qualsiasi polinomio di grado q calcolato con quella f.d.q. è esatto (cioè coincide con l'integrale esatto).

Formula del Trapezio

$$I_t = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



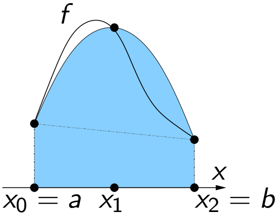
È una formula chiusa in cui $\tilde{f}$ è la retta che interpola f negli estremi dell'intervallo:
$x_0 = a$, $x_1 = b$, $w_0 = w_1 = (b-a)/2$

$$\boxed{I - I_t = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)}$$

Grado di esattezza=1

Formula di Simpson

$$I_s = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)\right]$$



È una formula chiusa in cui $\tilde{f}$ è la parabola che interpola f agli estremi e nel punto medio dell'intervallo:

$x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$

$w_0 = w_2 = (b-a)/6$, $w_1 = 2(b-a)/3$

$$\boxed{I - I_s = -\frac{1}{16}\frac{(b-a)^5}{180} f^{(4)}(\xi)}$$

Grado di esattezza=3

Formule di Newton-Cotes

• sono formule in cui $\tilde{f}(x)$ è l'interpolatore di Lagrange $p_n(x)$ e i nodi x_i sono equispaziati.

• Punto medio, trapezi e Simpson sono particolari formule di Newton-Cotes

• Sono poco usate per n alti.

• Per $n > 7$ i pesi w_i non sono tutti positivi: questo favorisce la propagazione degli errori di arrotondamento.

• $I - I_{appx} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]dx \leq$

$$\leq (b-a) \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)|}_{\text{non è garantito che } \to 0 \ per \ n \to \infty}$$

Quindi se l'errore di interpolazione non va a zero, nemmeno l'errore di integrazione va a zero.

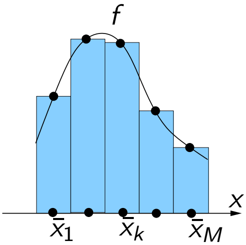
Alternative alle formule di Newton-Cotes

1. Utilizzare nodi di Chebyshev o Legendre. I nodi di Legendre hanno una distribuzione simile a quelli di Chebyshev (addensati verso gli estremi dell'intervallo e più radi al centro) e sono calcolabili come radici di determinati polinomi.
   Le formule di quadratura ottenute con questi nodi sono dette formule Gaussiane.
   Poichè l'interpolazione di Lagrange in questi nodi soddisfa la proprietà $\|f - p_n\|_{\infty,(a,b)} \to 0$ per $n \to \infty$, allora
   $$|I - I_{Gauss}| \leq (b-a)\|f - p_n\|_{\infty,(a,b)} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$
2. Approssimare $f(x)$ non con un polinomio interpolatore globale, ma con un interpolatore composito di grado basso: formule di Newton-Cotes composite

Formula composita del Punto Medio

$$I_{pm}^c = H\sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k), \qquad H = x_k - x_{k-1}, \text{ nodi equi}$$

$$\bar{x}_k = (x_{k-1}+x_k)/2$$



$$I - I_{pm}^c = \frac{b-a}{24}H^2 f''(\xi)$$

$$|I - I_{pm}^c| \leq \frac{b-a}{24}H^2 \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

La f è stata approssimata con una funzione costante a tratti

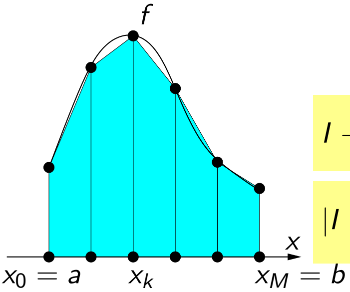
Grado di esattezza=1

Ordine di accuratezza 2 rispetto ad H, se $f \in C^2([a,b])$

Ordine di accuratezza di una f.d.q. è il grado di H nella formula dell'errore e dice come si comporta l'errore di quadratura quando $H \to 0$.

Formula composita dei trapezi

$$
\begin{aligned}
I_t^c &= \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{M}[f(x_{k-1})+f(x_k)] \\
&= \frac{H}{2}[f(a)+f(b)] + H\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k)
\end{aligned}
$$



$H = x_k - x_{k-1}$, nodi equi

$$I - I_t^c = -\frac{b-a}{12}H^2 f''(\xi)$$

$$|I - I_t^c| \leq \frac{b-a}{12}H^2 \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

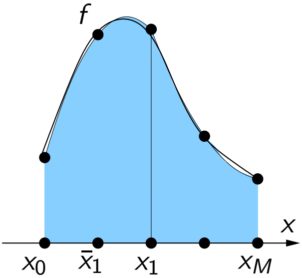
La f è stata approssimata con una funzione lineare a tratti

Grado di esattezza=1

Ordine di accuratezza 2 rispetto ad H, se $f \in C^2([a,b])$

Formula composita di Simpson

$$I_s^c = \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{M}\left[f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right]$$



$H = x_k - x_{k-1},$ nodi equi

$\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$

$$\boxed{I - I_s^c = -\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16}f^{(4)}(\xi)}$$

$$\boxed{|I - I_s^c| \leq \frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16}\max_{a\leq x\leq b}|f^{(4)}(x)|}$$

La f è stata approssimata con una funzione quadratica a tratti

Grado di esattezza=3

Ordine di accuratezza 4 rispetto ad H, se $f \in C^4([a,b])$