Metodi a passo variabile

Data una tolleranza ε per l'errore, il passo h non viene fissato a priori, ma calcolato di volta in volta in modo da garantire che

$$\max_{t_0 \le t_n \le T} |y_n - u_n| \le \varepsilon$$

Ad esempio EE diventa:

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ \text{per } n = 0, 1, \dots \text{ mentre } t_n < T \\ \quad \text{calcolo } h_n \text{ e } t_{n+1} = t_n + h_n \\ \quad \text{calcolo } u_{n+1} = u_n + h_n f(t_n, u_n) \ t.c. \ |y_{n+1} - u_{n+1}| \le \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

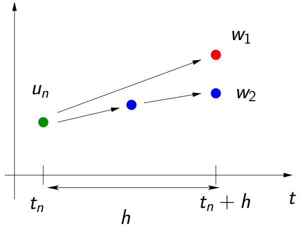
Le incognite ad ogni passo sono:
h_n (con cui calcolo $t_{n+1} = t_n + h_n$) e u_{n+1}
Per costruire un metodo adattivo si utilizzano:
- due metodi di discretizzazione diversi, o
- un metodo unico con due passi di discretizzazione diversi.

Eulero esplicito adattivo

Supponiamo di essere al passo t_n e di conoscere u_n,
dobbiamo calcolare $t_{n+1} = t_n + h_n$ e u_{n+1}.

Si parte da un certo h assegnato, si calcolano due soluzioni numeriche al tempo $t_{n+1} = t_n + h$ con due strategie diverse:

- w_1: soluzione ottenuta con un passo di EE di ampiezza h
- w_2: soluzione ottenuta con due passi di EE ognuno di ampiezza $h/2$



Stimiamo l'errore sulla soluzione esatta (che non abbiamo) partendo da w_1 e w_2: *stimatore* $= |w_1 - w_2|$.

facendo i conti a mano si trova che

$$|w_1 - w_2| \sim \frac{1}{2} \max_{k \leq n} |u_k| |y(t_n + h) - w_2|$$

Se $|w_1 - w_2| \leq \dfrac{1}{2} \max\limits_{k \leq n} |u_k| \, \varepsilon$

si accetta $h_n = h$, si pone $u_{n+1} = w_2$
si avanza al tempo successivo, partendo con $h = 2h_n$.

altrimenti

si pone $h = h/2$ e si itera rimanendo fermi al tempo t_n.

Algoritmo di Eulero esplicito adattivo

Input: f, $tspan$, $y0$, ε, h_{min}

Output: $\{t_n\}$, $\{u_n\}$

```
function [tn,un]=eulero_adattivo(odefun,tspan,y0,epsilon,hmin);
h=(tspan(2)-tspan(1))/10;
tn=tspan(1); % memorizzo il tempo t_0
un=y0;  % memorizzo la soluzione al tempo t_0
t=tn(1); w=un(1); % variabili che servono  nel ciclo successivo

while t< tspan(2) % ciclo sul tempo
 [t1,un1]=eulero_esp(odefun,[t,t+h],w,1) ; % un passo di ampiezza h
 [t2,un2]=eulero_esp(odefun,[t,t+h],w,2);  % due passi di ampiezza h/2
 w1=un1(end); w2=un2(end);
 stima=abs(w1-w2);
 if stima <= 0.5* norm(un,inf) * epsilon || h< hmin
  % accetto h e w2 e raddoppio h per il prossimo passo
  tn=[tn;t+h]; un=[un; w2]; h=h*2;
  t=tn(end); w=un(end);
 else
  h=h/2 ;% si rimane fermi a t_n e si riprova
 end
end
```

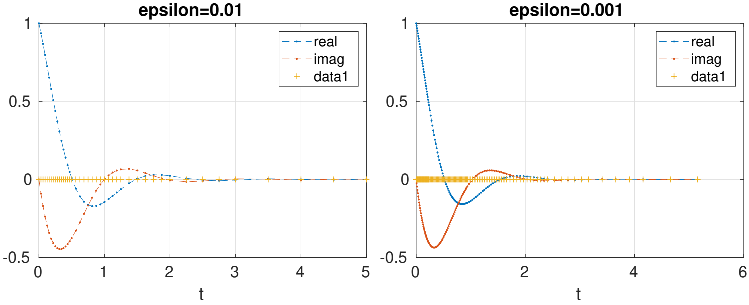
Esempio

Risolvere con Eulero adattivo

$$\begin{cases} y'(t) = -(2+3i)y(t) & t \in [0,5] \\ y(0) = 1 + 0i \end{cases}$$

ponendo $\varepsilon = 10^{-2}$, $h_{min} = 1.e-4$.
In un secondo momento fissare $\varepsilon = 10^{-3}$, $h_{min} = 1.e-4$.
Rappresentare su uno stesso grafico le parti reale e immaginaria della soluzione (è complessa) ed il vettore dei tempi t_n.

Risultati


epsilon=0.01
real
imag
data1
1
0.5
0
-0.5
0
1
2
3
4
5
t
epsilon=0.001
real
imag
data1
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
t