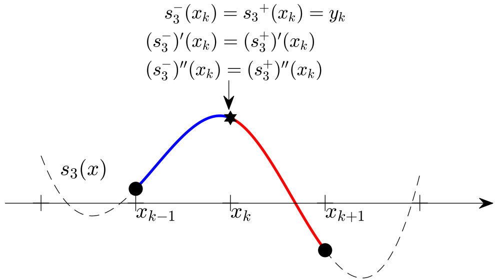
# Interpolazione con spline

Dati i punti $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ per $k = 0, \ldots, n$, definisco $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ l'intervallino tra due nodi successivi.

Una **spline cubica** è una funzione $s_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con queste proprietà:

1. $s_3 \in C^2([x_0, x_n])$, cioè $s_3$ è globalmente di classe $C^2$,
2. $s_{3|I_k} \in \mathbb{P}_3$ per $k = 0, \ldots, n-1$, cioè $s_3$ è un polinominio di grado 3 su ogni intervallino: $s_{3|I_k}(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k$. Su ogni intervallino ho 4 coeff. diversi;
3. $s_3(x_k) = y_k$ per $k = 0, \ldots, n$, cioè $s_3$ interpola i dati.



Dire $s_{3|I_k} \in \mathbb{P}_3$ per $k = 0, \dots, n-1$ vuol dire che sull'intervallino $i-$simo $s$ è caratterizzata da 4 parametri:

$$s_3(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k \qquad \forall x \in I_k.$$

Se ho $n$ intervalli, il **numero totale di parametri (incogniti)** che caratterizzano $s$ è $4n$.

**Quante equazioni abbiamo per determinarli?**:

- $(n+1)$ condizioni di interpolazione (nei nodi $x_k$, $k = 0, \dots, n$),
- $(n-1)$ condizioni di continuità $s_3^-(x_k) = s_3^+(x_k)$ (nei nodi $x_k$, $k = 1, \dots, n-1$),
- $(n-1)$ condizioni di continuità della derivata prima $(s_3^-)'(x_k) = (s_3^+)'(x_k)$,
- $(n-1)$ condizioni di continuità della derivata seconda $(s_3^-)''(x_k) = (s_3^+)''(x_k)$,

**In totale: $4n - 2$ equazioni.**

**Servono ancora 2 condizioni per chiudere il sistema:**

- **spline naturali**: impongono che $s_3''(x_0) = 0$ e $s_3''(x_n) = 0$,
- **spline not-a-knot**: impongono che $s_3'''$ continua in $x_1$ e $x_{n-1}$.

# Analisi dell'errore dell'interpolazione spline

Sia

$$H = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

Se $f \in C^4([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_2 > 0$ indipendente da $H$ t.c. ($s_3$ dipende da $H$):

$$E_s(H) = \|f - s_3\|_\infty = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - s_3(x)| \leq c_2 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Se i nodi $x_i$ sono equispaziati, allora $c_2 = 5/384$.