

Vantaggi della pivotazione per righe

Esercizio

(espivot)

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 0.5 \cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 + 0.5 \cdot 10^{-15} \\ 24 \\ 13 \end{pmatrix}$$

1. Risolvere il sistema dato con MEG **senza** pivotazione (propria function) e stampare a video la soluzione ottenuta.
2. Risolvere il sistema dato con MEG **con** pivotazione (propria function) e stampare la soluzione a video.
3. Sapendo che la soluzione esatta del sistema è il vettore $\mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$, commentare i risultati ottenuti.

Soluzione

1. Richiamando la propria function (MEG senza pivotazione), si ottiene:

```
x =  
-4.0000000000000003e+00  
 6.0000000000000000e+00  
 1.0000000000000000e+00
```

molto lontana dalla soluzione esatta del sistema.

Si ha:

```
xex=ones(3,1);  
err=norm(x-xex)/norm(xex)  
err =  
 4.082482904638631e+00
```

cioè un errore relativo del 408%.

Richiamando MEG con pivotazione, la soluzione è:

$x =$

```
1.0000000000000002e+00  
9.999999999999991e-01  
1.0000000000000000e+00
```

L'errore relativo ora è:

```
err=norm(x-xex)/norm(xex)
```

err =

```
1.146633409319802e-15
```

pari a $10^{-13}\%$.

Commenti.

MEG arriva a terminazione anche **senza pivotazione**, tuttavia **gli errori di arrotondamento si propagano in maniera disastrosa**.

Avevamo detto che i responsabili della propagazione degli errori di arrotondamento sono i moltiplicatori

$$m_{ik} = A_{ik}/A_{kk}.$$

Si generano i seguenti moltiplicatori (far stampare a video i moltiplicatori):

$m_{21} = 2$, $m_{31} = 3$ e $m_{32} = -3.4e + 15$. m_{32} è responsabile della forte propagazione degli errori.

Quando si effettua la pivotazione invece si hanno i seguenti moltiplicatori: $m_{21} = 2/3$, $m_{31} = 1/3$ e $m_{32} = 1/2$, sono tutti minori di 1.

Quindi, anche se MEG arriva a terminazione senza pivotazione, è sempre meglio utilizzare la pivotazione. **La pivotazione limita la propagazione degli errori di arrotondamento.**