

Esistenza e unicità di soluzione

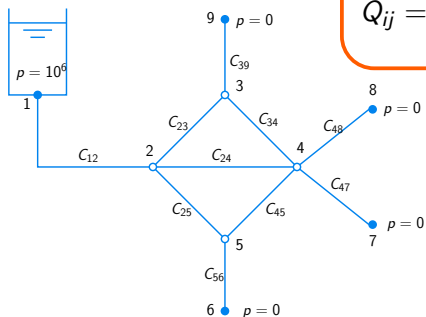
Teorema: Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare quadrato di dimensione n .
Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. $\exists!$ soluzione \mathbf{x} di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
2. $\det(A) \neq 0$,
3. $\exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I$,
4. $\text{rank}(A) = n$ (le colonne (o le righe) di A sono lin. indep.),
5. $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Tutte queste condizioni sono equivalenti, nel senso che ognuna di queste implica ognuna delle altre: basta verificarne una per averle tutte soddisfatte.

Calcolo della pressione nei nodi di una rete idrica

Rete idrica: in ogni condotto C_{ij} vale la **legge di Poiseuille**:



$$Q_{ij} = \frac{(p_i - p_j) \pi r_{ij}^4}{L_{ij} 8\mu}$$

Q_{ij} = portata del condotto C_{ij} [m^3/s]

p_i = pressione nel nodo i -simo [N/m^2]

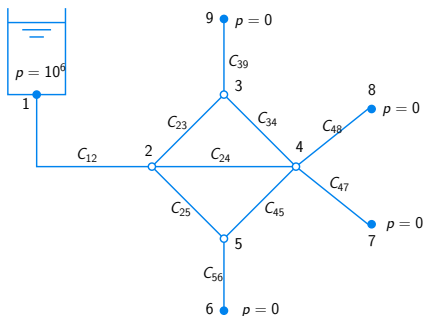
L_{ij} = lunghezza del condotto C_{ij} [m]

r_{ij} = raggio del condotto C_{ij} [m]

μ = viscosità dinamica dell'acqua [$kg\ m^2/s$]
(attrito interno del fluido)

In ogni nodo i della rete vale la **legge di bilancio**:
dove \mathcal{N}_i è l'insieme dei nodi che sono collegati
al nodo i . Es: $\mathcal{N}_2 = \{1, 5, 3, 4\}$.

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} Q_{ij} = 0$$

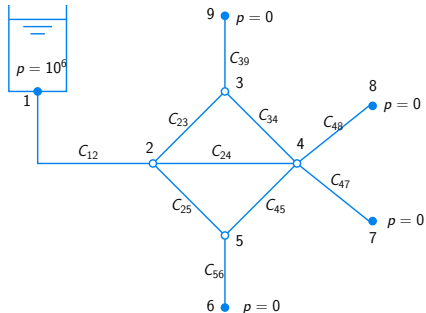


$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} Q_{ij} = 0$$

$$Q_{ij} = \frac{(p_i - p_j)}{L_{ij}} \frac{\pi r_{ij}^4}{8\mu}$$

Dati: raggio e lunghezza delle condotte, viscosità dell'acqua, pressione nel serbatoio e alle estremità della rete

Incognite: valori della pressione nei nodi 2, 3, 4, 5



Scriviamo l'equazione di bilancio per ogni nodo interno della rete:

4 equazioni:

$$\begin{cases} Q_{12} + Q_{23} + Q_{25} = 0 \\ Q_{23} + Q_{34} + Q_{39} = 0 \\ Q_{34} + Q_{45} + Q_{47} + Q_{48} = 0 \\ Q_{25} + Q_{45} + Q_{56} = 0 \end{cases}$$

Pongo $\alpha_{ij} = \frac{\pi r_{ij}^4}{8\mu L_{ij}}$, cosicch  $Q_{ij} = \frac{(p_i - p_j) \pi r_{ij}^4}{L_{ij} 8\mu} = \alpha_{ij}(p_i - p_j)$.

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \alpha_{12}(p_2 - p_1) + \alpha_{23}(p_2 - p_3) + \alpha_{25}(p_2 - p_5) = 0 \\ \alpha_{23}(p_3 - p_2) + \alpha_{34}(p_3 - p_4) + \alpha_{39}(p_3 - p_9) = 0 \\ \alpha_{34}(p_4 - p_3) + \alpha_{45}(p_4 - p_5) + \alpha_{47}(p_4 - p_7) + \alpha_{48}(p_4 - p_8) = 0 \\ \alpha_{25}(p_5 - p_2) + \alpha_{45}(p_5 - p_4) + \alpha_{56}(p_5 - p_6) = 0 \end{cases}$$

Riordinando le incognite e sostituendo i valori noti $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = 0$ e $p_{10} = 10^6$, abbiamo:

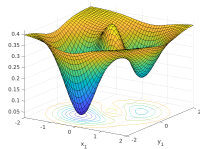
$$\begin{cases} (\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{25})p_2 - \alpha_{23}p_3 - \alpha_{25}p_5 = \alpha_{12}10^6 \\ -\alpha_{23}p_2 + (\alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{39})p_3 - \alpha_{34}p_4 = 0 \\ -\alpha_{34}p_3 + (\alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{47} + \alpha_{48})p_4 - \alpha_{45}p_5 = 0 \\ -\alpha_{25}p_2 - \alpha_{45}p_4 + (\alpha_{25} + \alpha_{45} + \alpha_{56})p_5 = 0 \end{cases}$$

ovvero un **sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite**.
Le incognite sono p_2 , p_3 , p_4 e p_5 .

Dobbiamo risolvere sistemi lineari ogni volta che:

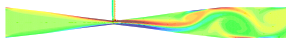
5. si deve risolvere un problema di ottimizzazione in più variabili:

$$\min_{x \in A \subset \mathbb{R}^n} f(x)$$



alla fine ci si riconduce a sistemi lineari, anche se la funzione f non è quadratica;

5. si deve risolvere un sistema di eqz. diff. alle derivate parziali (per le previsioni del tempo, per la simulazione del moto di fluidi, per la dinamica di popolazioni, per simulare un terremoto,....)



5. si deve risolvere un sistema di equazioni non lineari con il metodo di Newton o di Broyden (ad ogni iterazione...),

$$\begin{aligned} A &= Jf(x); \\ b &= -f(x); \\ z &= A \setminus b; \\ x_{\text{new}} &= z + x; \\ &\dots \end{aligned}$$

5.

Metodi diretti e metodi iterativi

Diretti	Iterativi
Def. Forniscono la soluzione esatta a meno degli errori di arrotondamento in un numero finito di operazioni.	Def. Calcolano $\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$, quindi la soluzione esatta potrebbe essere ottenuta solo dopo infinite operazioni. In realtà c'è un test d'arresto
Producono un errore: $\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ }{\ \mathbf{x}\ } \leq C\epsilon_M$	Producono un errore: $\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ }{\ \mathbf{x}\ } \leq C\epsilon_M + \epsilon$
Come operano: modificano A e \mathbf{b} in modo che si arrivi ad un sistema $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ma più semplice da risolvere.	Come operano: non modificano A e \mathbf{b} , ma sfruttano A in prodotti matrice-vettore.

dove:

\mathbf{x} è la soluzione esatta (su carta)

$\hat{\mathbf{x}}$ è la soluzione numerica

ϵ_M è la precisione di macchina

ϵ è la tolleranza per il test d'arresto del metodo iterativo