Fill-in di una matrice

Costruire la matrice A così definita ($n = 10$):

$$\begin{aligned} a_{ii} &= i \quad && \text{per } i = 2, ..., n \\ a_{1j} &= 1 \quad && \text{per } j = 1, ..., n \\ a_{i1} &= 1 \quad && \text{per } i = 1, ..., n \end{aligned}$$

e il termine noto $\mathbf{b}$ con

$$b_i = i \qquad \text{per } i = 1, ..., n$$

Modificare il MEG, inserendo due istruzioni di visualizzazione del pattern di A (comando `spy`)

MEG modificato con spy(A)

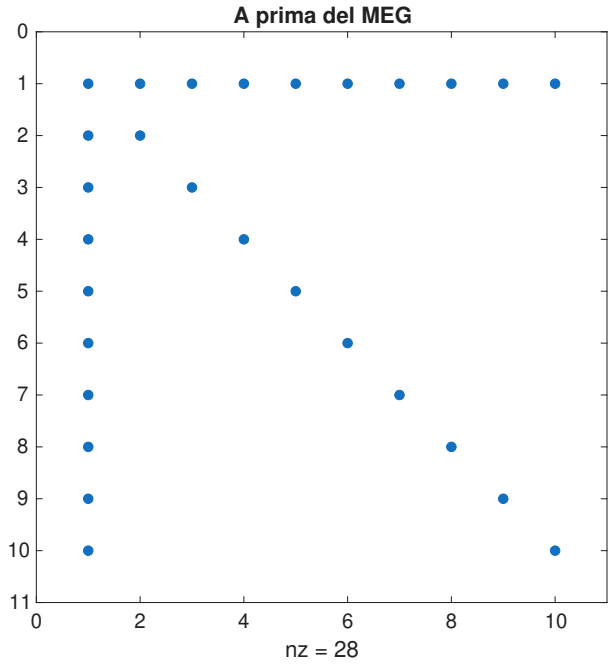
```
function x=meg_spy(A,b)

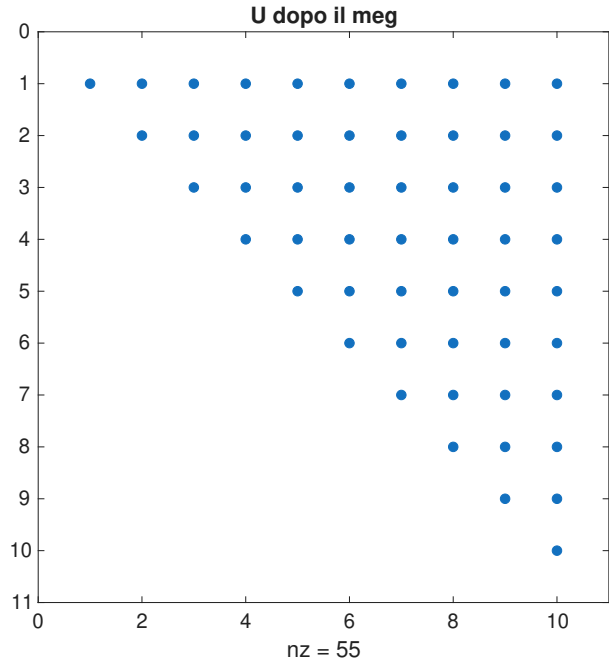
figure(1); clf
subplot(1,2,1)
spy(A)
title('A prima del MEG')

% algoritmo meg

sublot(1,2,2)
spy(U)
title('U dopo il meg')
```

I pattern delle matrici





Fill-in di matrice

Il MEG genera elementi non nulli in U anche dove il corrispondente elemento di A era nullo.
Questo fenomeno si chiama fill-in.
Anche se la matrice A ha pochi elementi non nulli (si dice che A è **sparsa**), la matrice U può avere molti più elementi non nulli rispetto ad A.

Tutti i metodi diretti agiscono sulla matrice, trasformandola in una matrice con un numero maggiore di elementi non nulli.

Esistono metodi di riordinamento di righe e colonne di una matrice da applicare prima di richiamare il MEG con lo scopo di minimizzare il fill-in.

Matrici di permutazione

Definizione. Una matrice di permutazione P di ordine n è una matrice quadrata ottenuta scambiando le righe o le colonne della matrice identità di ordine n.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{riga } 2 \text{ di } I \\ \text{riga } 3 \text{ di } I \\ \text{riga } 1 \text{ di } I \end{array}$$

Si ha che P è una matrice ortogonale, cioè $P^{-1} = P^T$.
Siano $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Posto $\mathrm{q} = [2; 3; 1]$:

istruzione matlab/octave	operazione matriciale	significato
`A(q,:)`	PA	(permuto le righe di A)
`A(:,q)`	AP^T	(permuto le colonne di A)
`A(q,q)`	PAP^T	(permuto righe e colonne di A)
`b(q)`	$P\mathbf{b}$	(permuto le righe di $\mathbf{b}$)

Permutazione della matrice per ridurre il fill-in

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad PA\underbrace{P^T P}_{I}\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\underbrace{(PAP^T)}_{\texttt{Ap}}\underbrace{(P\mathbf{x})}_{\texttt{xp}} = \underbrace{P\mathbf{b}}_{\texttt{bp}}$$

Esempio: `colperm` colperm costruisce una permutazione delle colonne in modo da spostare le righe e colonne di A con il maggior numero di elementi verso il fondo della matrice.

```
A=. . . % stessa matrice di prima
q = colperm(A); % q e' un vettore che contiene
%                 una permutazione degli indici
Ap=A(q,q); %  matrice permutata
bp=b(q);  % termine noto permutato
xp=meg_spy(Ap,bp); % soluzione permutata
x=zeros(n,1);  % ricostruisco la soluzione ordinata
x(q)=xp % sto dicendo che P x = xp
```

I pattern delle matrici dopo la permutazione

