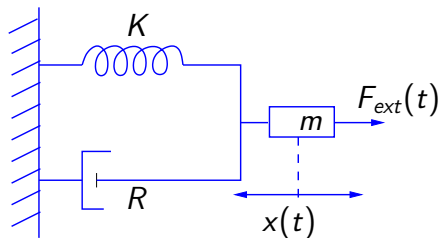


Equazione differenziale associata ad un oscillatore forzato



Oscillatore semplice formato da un corpo di massa m e da una molla di costante elastica K .

L'oscillatore è sottoposto ad una forza esterna $F_{ext}(t)$ ($t =$ tempo) ed è presente una resistenza meccanica R .

$x(t)$ è lo spostamento della massa m al tempo t rispetto alla posizione di equilibrio determinata dalla lunghezza a riposo della molla.

2a legge di Newton: $F = m \cdot a$, con $a = x''(t)$ accelerazione e F la risultante di tutte le forze che agiscono sul punto di massa m .

$$F = F_{ela} + F_{res} + F_{ext}$$

$$F_{ela} = -Kx(t) \quad (\text{legge di Hooke, } K = \text{cost. elastica})$$

$$F_{res} = -Rx'(t) \quad (\text{resistenza di tipo viscoso, } R = \text{coeff. di resistenza})$$

$$F_{ext} = (\text{forza esterna})$$

$$\Rightarrow -Kx(t) - Rx'(t) + F_{ext}(t) = mx''(t)$$

$x(t)$ è soluzione della seguente equazione differenziale:

$$mx''(t) + Rx'(t) + Kx(t) = F_{ext}(t) \quad t \geq t_0$$

L'equazione differenziale ha unica soluzione se assegno **due condizioni iniziali**:

$x(t_0) = x_0$ spostamento all'istante iniziale,

$x'(t_0) = 0$ velocità all'istante iniziale.

Trasformazione in un sistema del primo ordine

Partiamo dal sistema

$$\begin{cases} m x''(t) + R x'(t) + K x(t) = F_{\text{ext}}(t) & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo riscrivere l'equazione del secondo ordine come un sistema di equazioni differenziali di ordine 1. Poniamo:

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = y_1'(t) = x'(t),$$

$$m \underbrace{x''(t)}_{y_2'(t)} + R \underbrace{x'(t)}_{y_2(t)} + K \underbrace{x(t)}_{y_1(t)} = F_{\text{ext}}(t)$$



$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = \frac{1}{m} (-K y_1(t) - R y_2(t)) + \frac{F_{\text{ext}}(t)}{m} \\ y_1(0) = x_0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Analisi del problema

Il problema dato è lineare, quindi possiamo riscrivere

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -R/m \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{ext}(t)}{m} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A servono per individuare quali h garantiscono che un determinato metodo sia assolutamente stabile nella risoluzione del problema dato.

Oss. Se $R = 0$, gli autovalori sono immaginari puri.

Esercizio

Si considerino i seguenti dati (tralasciamo le unità di misura):

$$F_{\text{ext}}(t) = 0$$

$$R = 0.2 \text{ (coefficiente di attrito)}$$

$$K = 0.8 \text{ (costante elastica della molla),}$$

$$m = 0.5 \text{ (massa del corpo),}$$

$$x_0 = 1 \text{ (posizione iniziale del corpo),}$$

$$t_0 =, T = 40 \text{ (intervallo temporale).}$$

Si vuole calcolare la soluzione del problema con il metodo predictor-corrector AB3-AM4.

1. Calcolare la soluzione con $h = 0.001$ (diventa la mia soluzione di riferimento). Il metodo AB3AM4 è di ordine 4, se il metodo è ass. stabile con questo h , mi aspetto che l'errore sia dell'ordine di 10^{-12} .

2. Risolvere lo stesso problema con $h = 1$, $h = 0.8$, $h = 0.4$, $h = 0.1$ e disegnare la soluzione ottenuta sullo stesso grafico su cui è disegnata la soluzione di riferimento. Dire per quali valori di h lo schema è assolutamente stabile e per quali valori di h la soluzione è una buona approssimazione della soluzione esatta (qui rappresentata dalla soluzione di riferimento).
3. Ripetere i punti 1 e 2, ma con $F_{ext} = 1$, osservare che le conclusioni sulla assoluta stabilità e sulla bontà della soluzione numerica sono analoghe a quelle che si ottengono con $F_{ext} = 0$.

AB3-AM4

Sfruttando la rappresentazione grafica della regione di assoluta stabilità del metodo, determinare il valore $h_0 > 0$: $\forall h < h_0$ il metodo AB3-AM4 risulti assolutamente stabile. Lavorare sul problema omogeneo e poi verificare che la soluzione del problema non omogeneo “esplode” in corrispondenza degli $h \geq h_0$.

