EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

E ALLE DERIVATE PARZIALI

Problema di Cauchy del primo ordine.

Dati $I = (t_0, T) \subset \mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ si cerca una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ soluzione di

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'equazione della logistica o di Verhulst

$y(t)$ rappresenta la numerosità di individui di una popolazione animale che si sviluppa in un ambiente con risorse limitate in assenza di predatori.

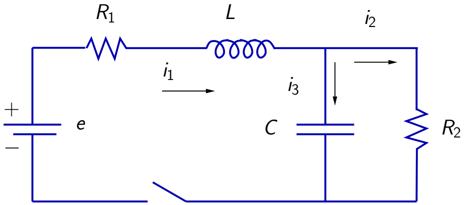
$$\begin{cases} y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) & t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Foto di PublicDomainPictures da Pixabay

Un semplice circuito elettrico

$i_1(t)$ è l'intensità di corrente nella prima maglia.
$v(t)$ è la differenza di potenziale ai capi del condensatore.

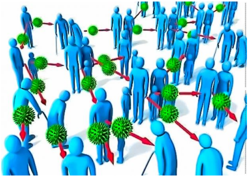
$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{1}{L}(e - i_1 R_1 - v) \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{C}\left(i_1 - \dfrac{v}{R_2}\right) \\ i_1(0) = 0, v(0) = 0 \end{cases}$$



Diffusione di una malattia, modello SIR

$S(t)$ numero di individui suscettibili alla malattia al tempo t,
$I(t)$ numero di individui infettivi (contagiosi) al tempo t,
$R(t)$ numero di individui recovered (guariti) al tempo t.
$S(t) + I(t) + R(t) = N$ numero totale di individui (costante nel tempo),

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta\, I(t)\, S(t)/N & t \in (0, T] \\ I'(t) = \beta\, I(t)\, S(t)/N - \gamma\, I(t) & t \in (0, T] \\ R'(t) = \gamma\, I(t) & t \in (0, T] \\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0,\ R(0) = 0. & \end{cases}$$



Equazioni alle derivate parziali

Operatori differenziali elementari

$u = u(\mathbf{x})$ funzione scalare, $\mathbf{b} = [b_1(\mathbf{x}), \ldots, b_d(\mathbf{x})]$ funzione vettoriale.

- gradientr di u: $\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_d} \end{bmatrix}$
- divergenza di $\mathbf{b}$: $\mathrm{div}\mathbf{b} = \nabla \cdot \mathbf{b} = \dfrac{\partial b_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial b_d}{\partial x_d}$
- Laplaciano di u: $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$
- curl di $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$: $curl\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

Equazioni di Poisson e di Laplace

Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, si cerca $u : \Omega \to \mathbb{R}$ soluzione di

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega$$

[Laplace quando $f \equiv 0$]

Alcune applicazioni:

Photo by Sarah Richter from Pixabay

stato stazionario dopo la diffusione di una goccia di sostanza solubile in un liquido

u = concentrazione inchiostro

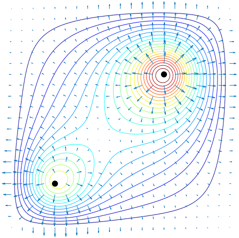
f = sorgente di inchiostro

Photo by Edith Lüthi from Pixabay

membrana elastica soggetta ad una forza esterna (caso stazionario)

u = spostamento verticale

f = forza esterna



potenziale elettrico generato da due cariche puntiformi

u = potenziale elettrico

$f = \rho/\epsilon$ (densità su costante dielettrica)

Equazione del calore

Data $f : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$, si cerca $u : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$ soluzione di

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \times (t_0, T)$$

- $u =$ temperatura del corpo che occupa lo spazio Ω
- $f =$ sorgente di calore
- $\mu =$ diffusività termica

Maggiore è μ, più veloce è la diffusione del calore.

https://strumentidimisuraclick.com/termocamera/

Equazione delle onde

Data $f : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$, si cerca $u : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$ soluzione di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \times (t_0, T)$$

- $u =$ forma dell'onda
- $f =$ sorgente
- $c =$ velocità di propagazione $(c > 0)$

©Sean Scott Photography
onda piana

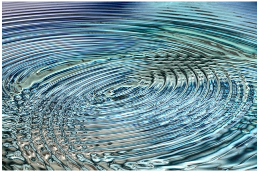


Photo by Gerd Altmann from Pixabay
onde circolari incidenti sulla superficie d'acqua

Equazione di convezione-diffusione-reazione

Dati $f : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$, $\mu = \mu(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, e $\gamma(\mathbf{x}) > 0$, si cerca $u : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$ soluzione di

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{diffusione}}}{\nabla \cdot (\mu \nabla u)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{convezione}}}{\nabla \cdot (\mathbf{b} u)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{assorbimento} \\ (\textit{o reazione})}}{\gamma u} = f$$

Photo by Nikola Belopitov from Pixabay

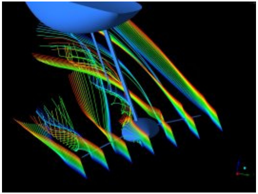
diffusione di un inquinante in presenza di vento **b**

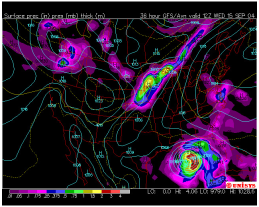
Florida Division of Plant Industry, Florida Department of Agriculture and Consumer Services, Bugwood.org. CC3.0

evoluzione del numero di individui, $\mathbf{b} =$ fattore di crescita, γ =fattore di mortalità, $\mu =$ dispersione stocastica

Equazioni di Navier Stokes

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in} \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{in} \Omega \times (0, T) \\ \text{cond. iniziali} & \text{in} \Omega \times \{0\} \\ \text{cond. al bordo} & \text{su} \partial \Omega \times (0, T) \end{array}\right\}$$





Altre equazioni alle derivate parziali

di Helmholtz:	$-\Delta u - \omega^2 u = 0$ con $\omega \neq 0$
della piastra:	$u_{tt} + \Delta^2 u = f$
del telegrafo:	$u_{tt} - \tau^2 u_{xx} + \alpha u_t + \beta u = 0$
di Burgers:	$u_t + u u_x = \varepsilon u_{xx}$ (viscoso $\varepsilon > 0$; inviscido $\varepsilon = 0$)
di Korteg-de Vries:	$u_t + c u u_x + u_{xxx} = 0$ (con $c \neq 0$)
di Vahn-Hilliard:	$u_t + \nu \Delta^2 u - \Delta(\beta u^3 - \alpha u) = 0$ (con $\nu > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$)
di Monge-Ampere:	$\det(Hu) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u)$ (dove H è la matrice Hessiana).