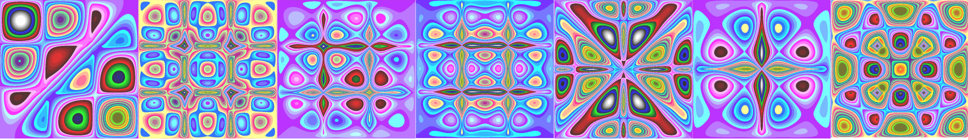


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

CALCOLO SCIENTIFICO

A.A. 2025/26

Paola Gervasio

e-mail: paola.gervasio@unibs.it

web: https://paola-gervasio.unibs.it

Dal problema ($\rightarrow$ cs $\rightarrow$) alla soluzione

(cs = calcolo scientifico)

1. problema reale: una ditta che produce abiti per bambini vi chiama e vi chiede di scrivere un'app che, note le altezze di un campione di 1000 individui, dica loro quanti pezzi di ogni modello della collezione bisogna produrre per ogni taglia (le taglie vanno in base all'altezza).

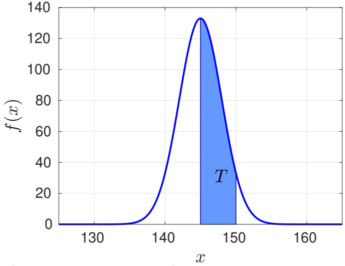
Dati: altezze di un campione di 1000 individui

Dal problema ($\rightarrow$ cs $\rightarrow$) alla soluzione

2. modello matematico (teoria della probabilità):

Dai dati estraiamo l'altezza media $x_m = 145$cm; e consideriamo la *distribuzione di probabilità normale*. La funzione di densità associata è

$f(x) = \frac{1000}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_m)^2/(2\sigma^2)}$, di cui conosciamo la *deviazione standard* $\sigma = 3$



Grazie alla teoria della probabilità sappiamo che: il numero di individui con altezza compresa tra h_1 e h_2 è stimabile con

$$P[h_1 \leq X \leq h_2] = \int_{h_1}^{h_2} f(x)dx$$

Questa è la soluzione "nel continuo", quella esatta.

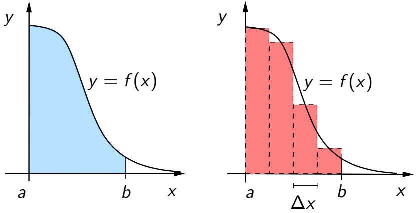
Dal problema ($\rightarrow$ cs $\rightarrow$) alla soluzione

3. modello numerico (o discreto)

Peccato che la funzione e^{-x^2} non sia integrabile elementarmente, quindi nemmeno $f(x) = \frac{1000}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_m)^2/(2\sigma^2)}$ è integrabile con le regole simboliche.

$$\text{Approssimiamo } I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{con} \quad I_{appx} = \sum_{k=1}^{M} f(x_k) w_k$$

I valori x_k e w_k caratterizzano un metodo particolare



Si parla di problema discreto, soluzione discreta

Dal problema (→ cs →) alla soluzione

4. implementazione al calcolatore

Dobbiamo scrivere un programma per la risoluzione numerica del nostro problema discreto, ad esempio con Matlab:

```
function Imp=pmedioc(a,b,M,f)
%   IMP =PMEDIOC(A,B,M,FUN) calcola una
%   approssimazione dell'integrale della funzione
%   FUN con M intervalli in [A,B]
H=(b-a)/M;
x = linspace(a,b,M+1);
Imp=0;
for k=2:M+1;
    Imp=Imp+f((x(k-1)+x(k))/2);
end
Imp=Imp*H;
```

Dal problema ($\to$ cs $\to$) alla soluzione

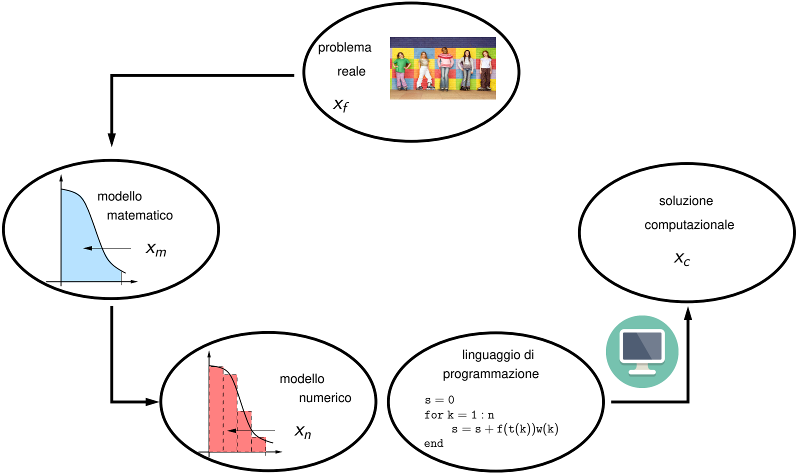
5. interpretazione dei risultati sia grafici che numerici.
La soluzione numerica ottenuta è soddisfacente?

M	metodo 1	metodo 2
2	457.0	442.6
4	453.4	449.8
8	452.5	451.6
16	452.3	452.1
32	452.2	452.2

Tabella: Approssimazione di $P[145 \leq X \leq 150] = \int_{145}^{150} f(x)dx$ al variare del numero M di intervalli.

Chi mi garantisce che la soluzione numerica sia una buona approssimazione di quella esatta? Vedremo le stime a priori dell'errore: stimano l'errore commesso senza conoscere la soluzione esatta e ancor prima di calcolare quella numerica.

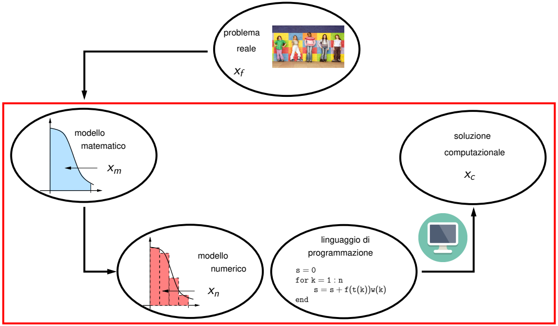
Dal problema reale alla soluzione computazionale



Il calcolo scientifico

Il **Calcolo Scientifico** è quella disciplina che, partendo dal modello matematico,

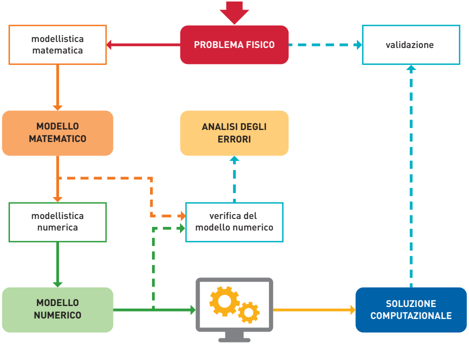
1. formula un modello numerico,
2. propone metodi efficienti per calcolare la soluzione computazionale,
3. verifica la correttezza e l'accuratezza del modello numerico e valida il processo confrontando i risultati ottenuti al computer con i dati sperimentali.



Il calcolo scientifico

Il **Calcolo Scientifico** è quella disciplina che, partendo dal modello matematico,

1. formula un modello numerico,
2. propone metodi efficienti per calcolare la soluzione computazionale,
3. verifica la correttezza e l'accuratezza del modello numerico e valida il processo confrontando i risultati ottenuti al computer con i dati sperimentali.



I blocchi a sfondo bianco rappresentano i processi; quelli a sfondo colorato sono input o output di questi processi.

Il calcolo scientifico

Il **Calcolo Scientifico** è quella disciplina che, partendo dal modello matematico,

1. formula un modello numerico,
2. propone metodi efficienti per calcolare la soluzione computazionale,
3. verifica la correttezza e l'accuratezza del modello numerico e valida il processo confrontando i risultati ottenuti al computer con i dati sperimentali.

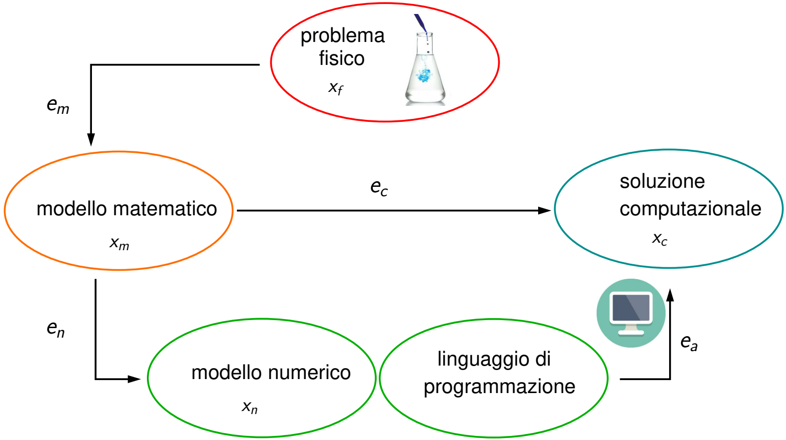
Abbiamo bisogno di:

– matematica
– calcolatori

Dobbiamo tenere sotto controllo:

– gli errori
– i costi computazionali

Gli inevitabili errori

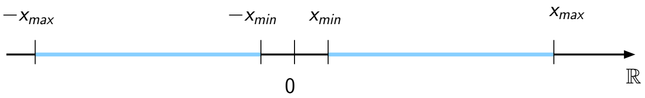


e_m=errore di modello, e_n=errore numerico,
e_a=errore di arrotondamento, e_c=errore computazionale
$(e_c = e_n + e_a)$,

L'artimetica di macchina

Su un calcolatore non si possono rappresentare tutti i numeri reali, ma solo quelli con un numero finito di cifre decimali, compresi nell'insieme

$$[-x_{max}, -x_{min}] \cup \{0\} \cup [x_{min}, x_{max}]$$



In Matlab: $x_{min} = 2.2251 \cdot 10^{-308}$, $x_{max} = 1.7977 \cdot 10^{308}$.
I comandi matlab sono: `realmin` e `realmax`
Matlab usa base $\beta = 2$ e 8 Bytes per memorizzare un numero macchina.

Errori di arrotondamento

Nel rappresentare un numero in macchina si commette un errore (rounding error) che dipende dalla base (β) di rappresentazione usata e dal numero t di bit utilizzati per memorizzare la mantissa del numero:

$$|x - fl_t(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}|x|$$

In Matlab $\beta = 2$ e $t = 53$,

$$\frac{1}{2}\beta^{1-t} = 1.1102 \cdot 10^{-16}$$

Una formula ricorsiva inefficiente

$$\begin{cases} f_2 = 2 \\ f_{n+1} = 2^{n-0.5}\sqrt{1-\sqrt{1-4^{1-n}f_n^2}}, \quad n = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

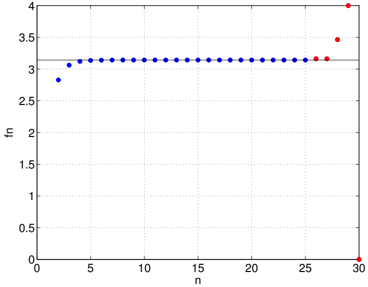
Si riesce a dimostrare che $\lim_{n\to\infty} f_n = \pi$, quindi i valori f_n sono delle approssimazioni di π, tanto più accurate quanto più n è alto.

Una formula ricorsiva inefficiente

$$\begin{cases} f_2 = 2 \\ f_{n+1} = 2^{n-0.5}\sqrt{1-\sqrt{1-4^{1-n}f_n^2}}, \quad n = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Si riesce a dimostrare che $\lim_{n\to\infty} f_n = \pi$, quindi i valori f_n sono delle approssimazioni di π, tanto più accurate quanto più n è alto.

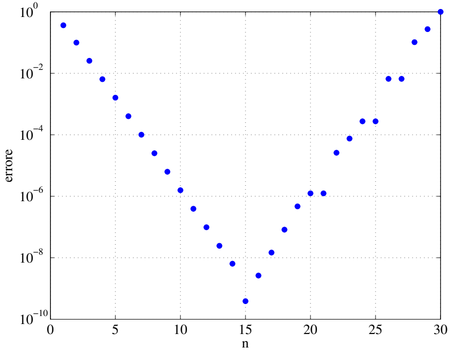
Se scriviamo un programmino e lo lanciamo, otteniamo:



I risultati numerici

Misuro l'errore (relativo) tra π e la sua approssimazione f_n, mi aspetto che l'errore vada a zero quando $n \to \infty$.

$$\text{errore} = \frac{|f_n - \pi|}{\pi}$$



L'errore scende fino ad un certo punto (per $n = 15$) e poi ricomincia a salire.

La ricetta fornita dalla teoria NON funziona in pratica, a causa della propagazione degli errori di arrotondamento.

Un altro tipo di (in)efficienza

Risolvere un sistema lineare di 24 equazioni in 24 incognite con il metodo di Cramer richiede circa

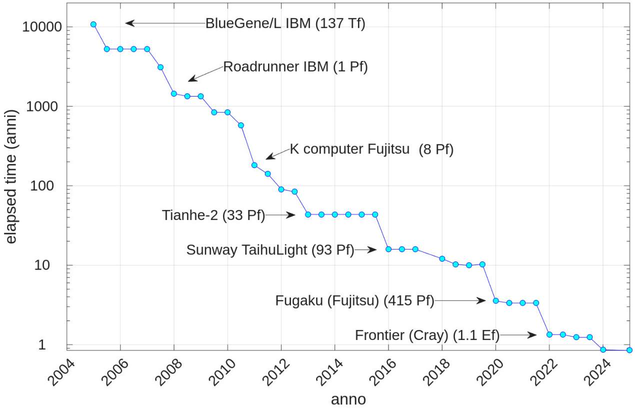
$$3 \cdot 25! \sim 4.65 \cdot 10^{25} \text{ operazioni elementari } (+, -, \times, /)$$

Il calcolatore più veloce al mondo (June 2025):
El Capitan (Cray) (Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), California),
11,039,616 computing cores,
velocità di picco: 1.742 **Exa-flops =** 1.742×10^{18} **flops**

Sul Supercomputer El Capitan:
$4.65 \cdot 10^{25}$ op. elem. sono svolte in $\sim 2.7 \cdot 10^{7}$ sec $\sim$ 10 mesi
flops=FLoating point Operations Per Second

… e dal 2005 ad oggi

per risolvere un sistema lineare di 24 equazioni in 24 incognite con il metodo di Cramer sul calcolatore più veloce al mondo:



1Tf$= 10^{12}$ flops
1Pf$= 10^{15}$ flops
1Ef$= 10^{18}$ flops

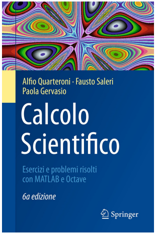
Servono metodi numerici più veloci, alternativi ai metodi classici che si usano con carta e penna.

Per fortuna, con i metodi numerici attuali, un sistema lineare 24×24 si risolve in un tempo trascurabile (molto meno di un secondo) su un core di un comune laptop.

Contenuti del corso CALCOLO SCIENTIFICO (6CFU)

1. Istruzioni fondamentali di Matlab
2. Propagazione di errori di arrotondamento
3. Risoluzione di equazioni non lineari
4. Risoluzione di sistemi lineari di grandi dimensioni
5. Approssimazione di funzioni e dati
6. Integrazione e derivazione numerica
7. Approssimazione di equazioni differenziali ordinarie

Informazioni sul corso



Testo di riferimento:
A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio.
Calcolo Scientifico,
6a ed. Springer Italia, Milano, 2017.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-88-470-3953-7

Modalità d'esame: Unica prova scritto/pratica in laboratorio con esercizi e domande di teoria. Durante la prova in laboratorio NON sarà possibile portare materiale (libri, appunti o proprie matlab function), né consultare il materiale di lezione.
Si potranno usare le function matlab scritte durante le esercitazioni.
Tutte le informazioni su `https://paola-gervasio.unibs.it/CS`