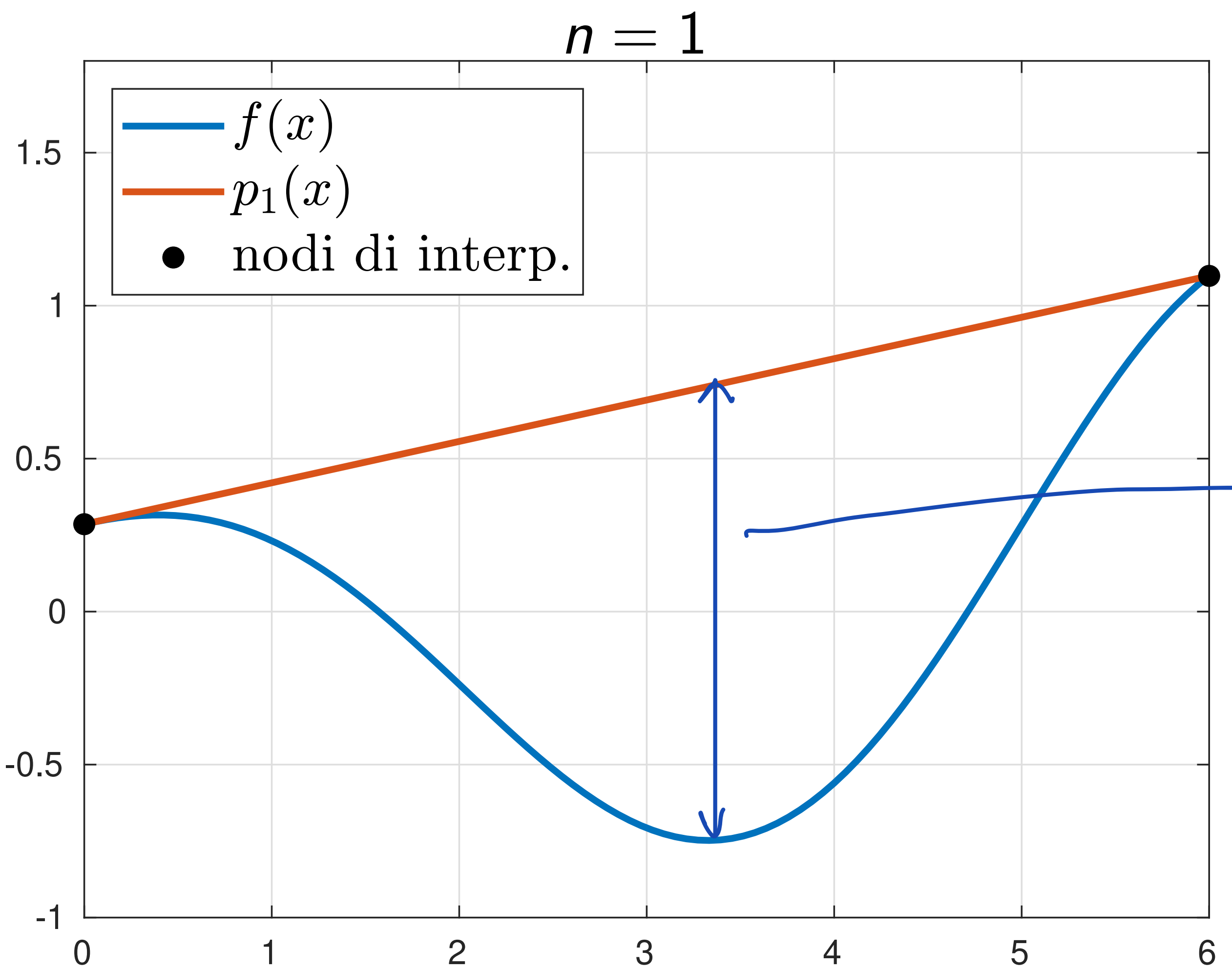
Interpolazione globale di Lagrange

Esempio 1

$f(x) = \frac{x+2}{7}\cos(x)$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[0, 6]$.

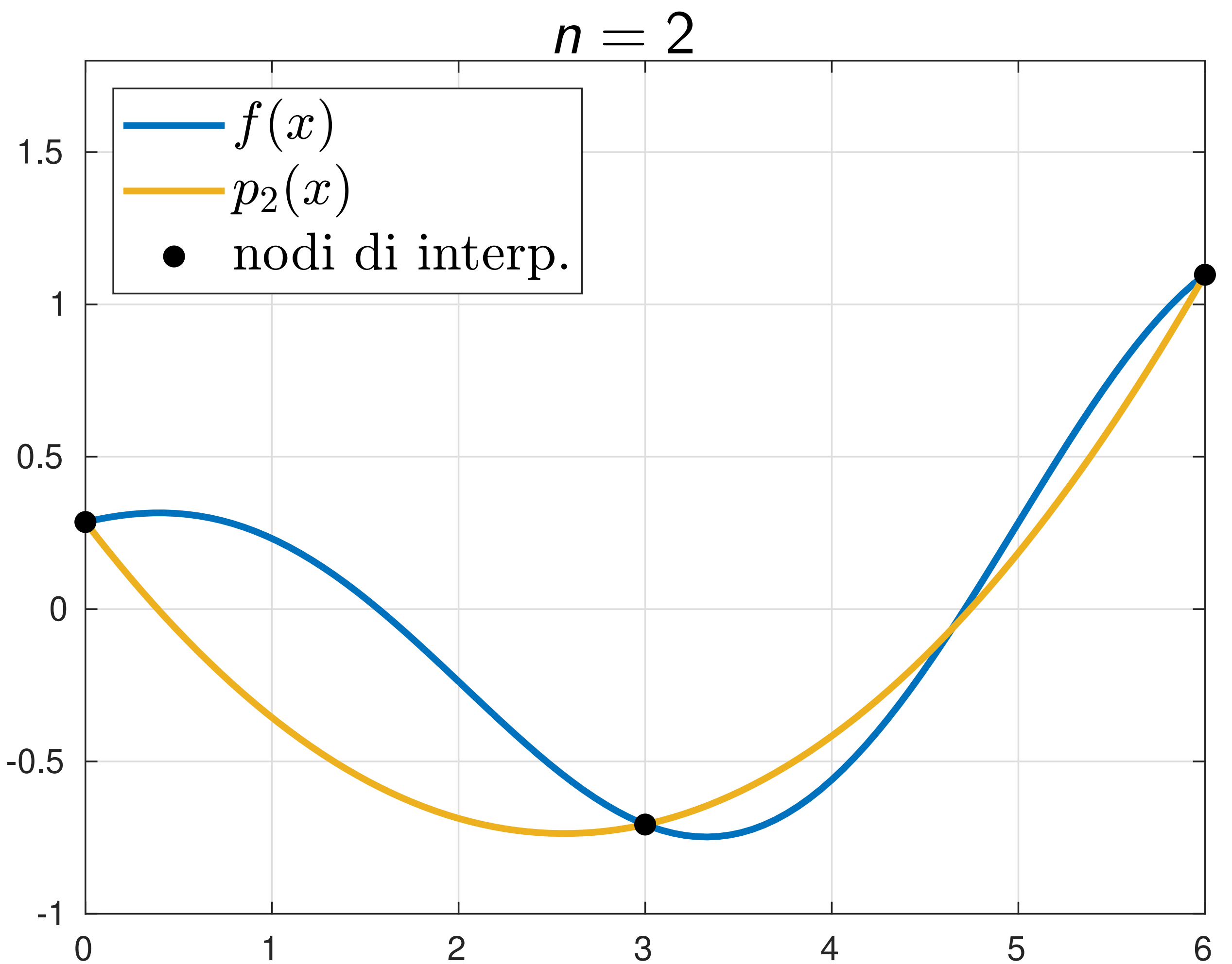


$\|f - p_n\|_\infty =$

$= \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - p_n(x)|$

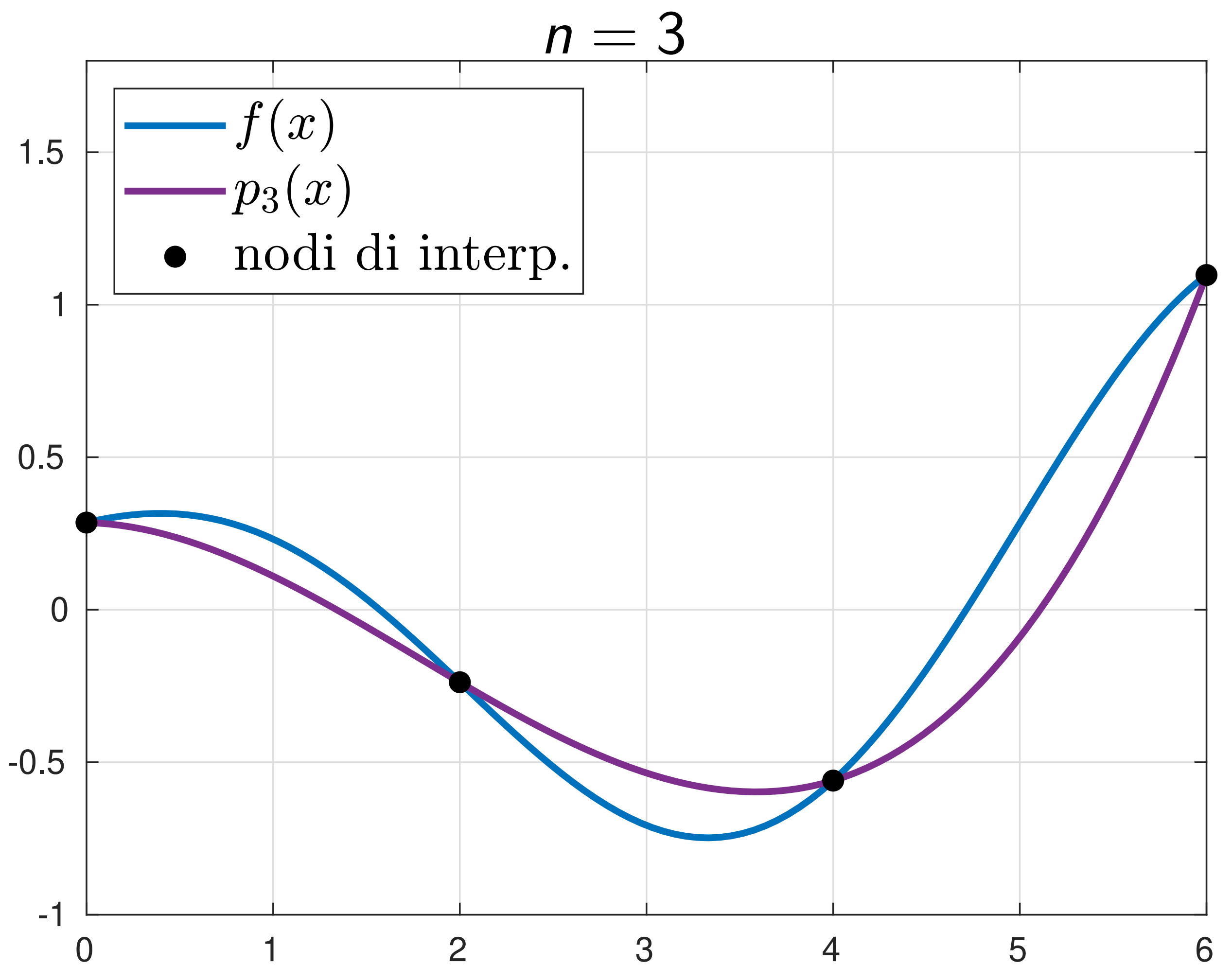
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7}\cos(x)$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[0,6]$.



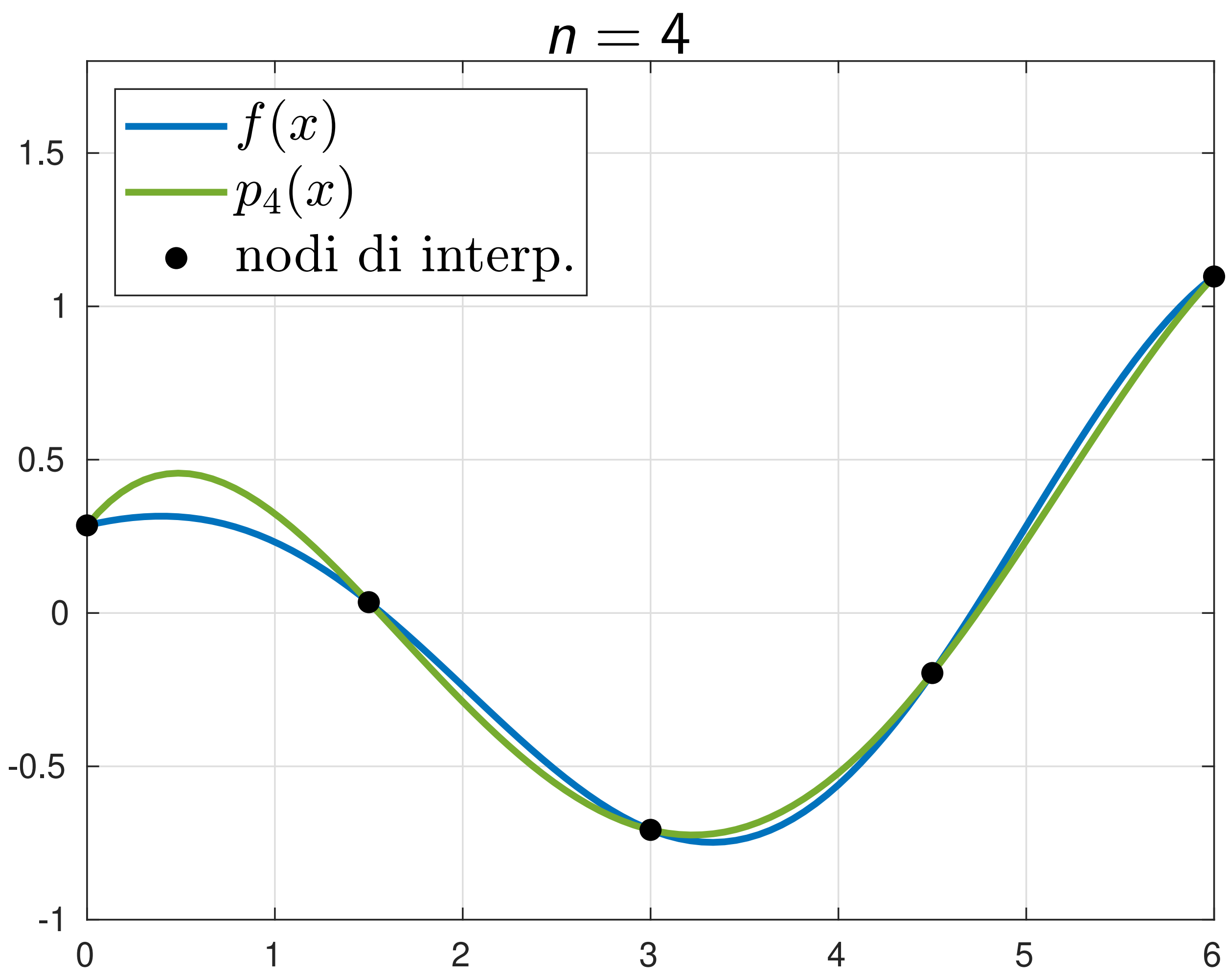
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7}\cos(x)$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[0, 6]$.



Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{x+2}{7}\cos(x)$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[0,6]$.

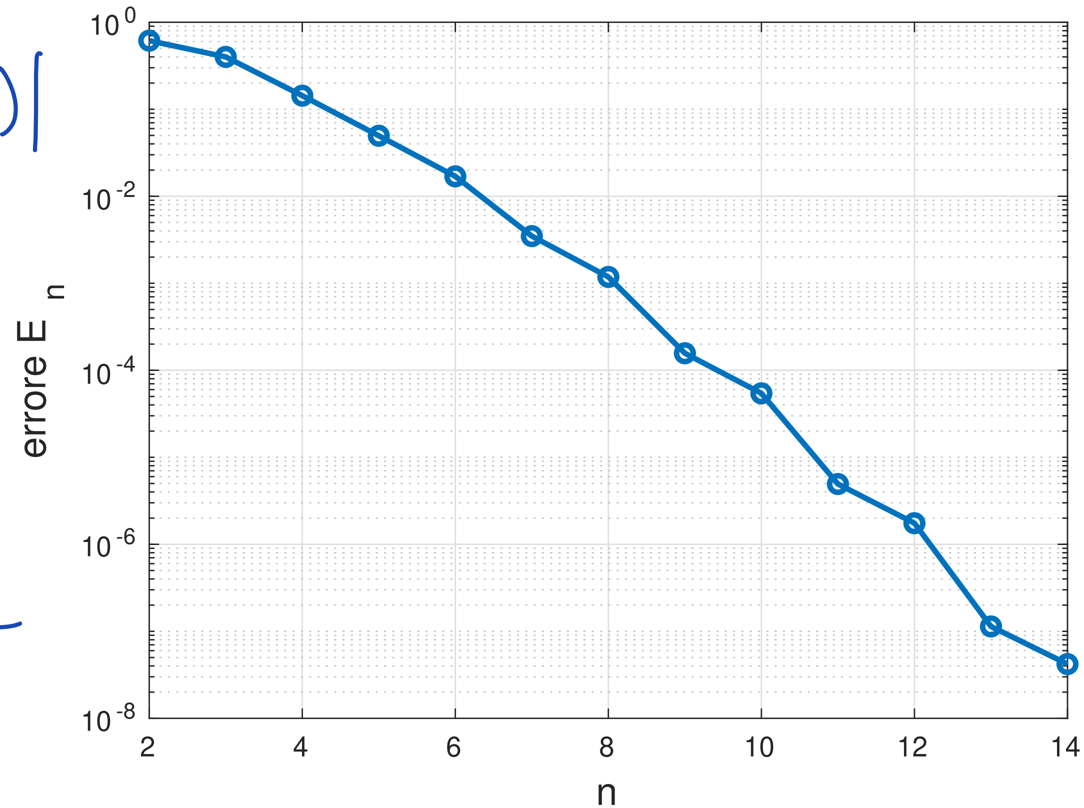


Gli errori

$f(x) = \frac{x+2}{7}\cos(x)$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[0,6]$.

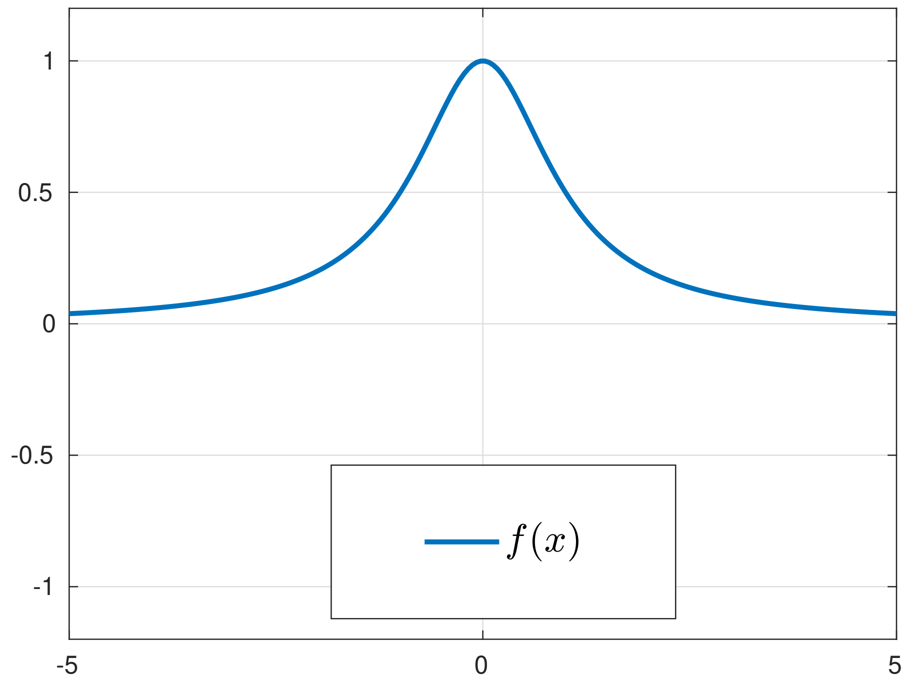
$$\max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ nella norma infinito



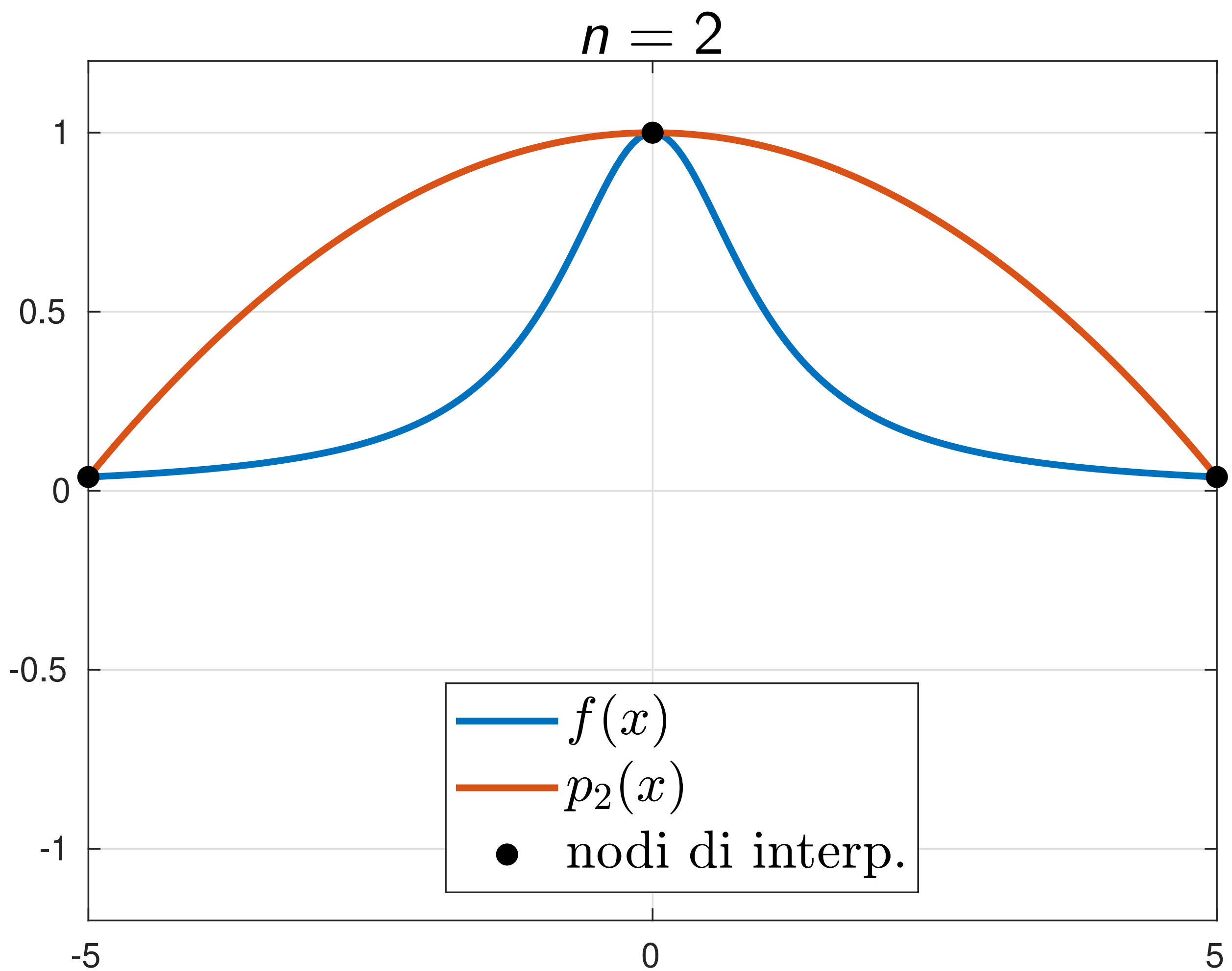
Gli errori E_n stanno tendendo a zero quando n cresce. In questo caso l'interpolazione globale di Lagrange su nodi equispaziati fornisce una successione di polinomi $p_n(x)$, per $n \geq 1$, che sta convergendo alla funzione $f(x)$ quando n cresce.

Problema 2. Data $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si vuole costruire il polinomio interpolatore di Lagrange di f in $(n+1)$ nodi equispaziati in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ per $n = 2, \ldots, 14$.



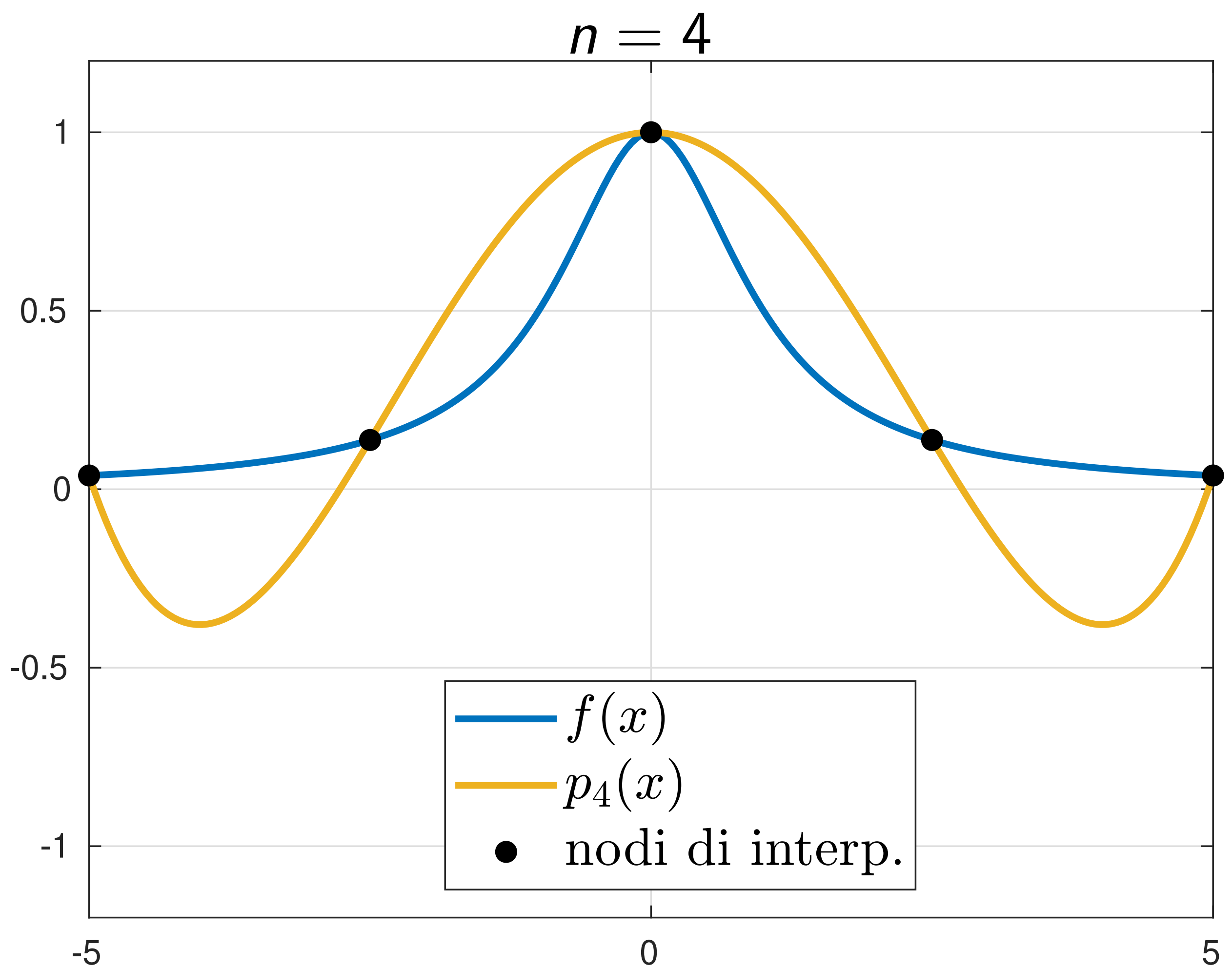
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5, 5]$.



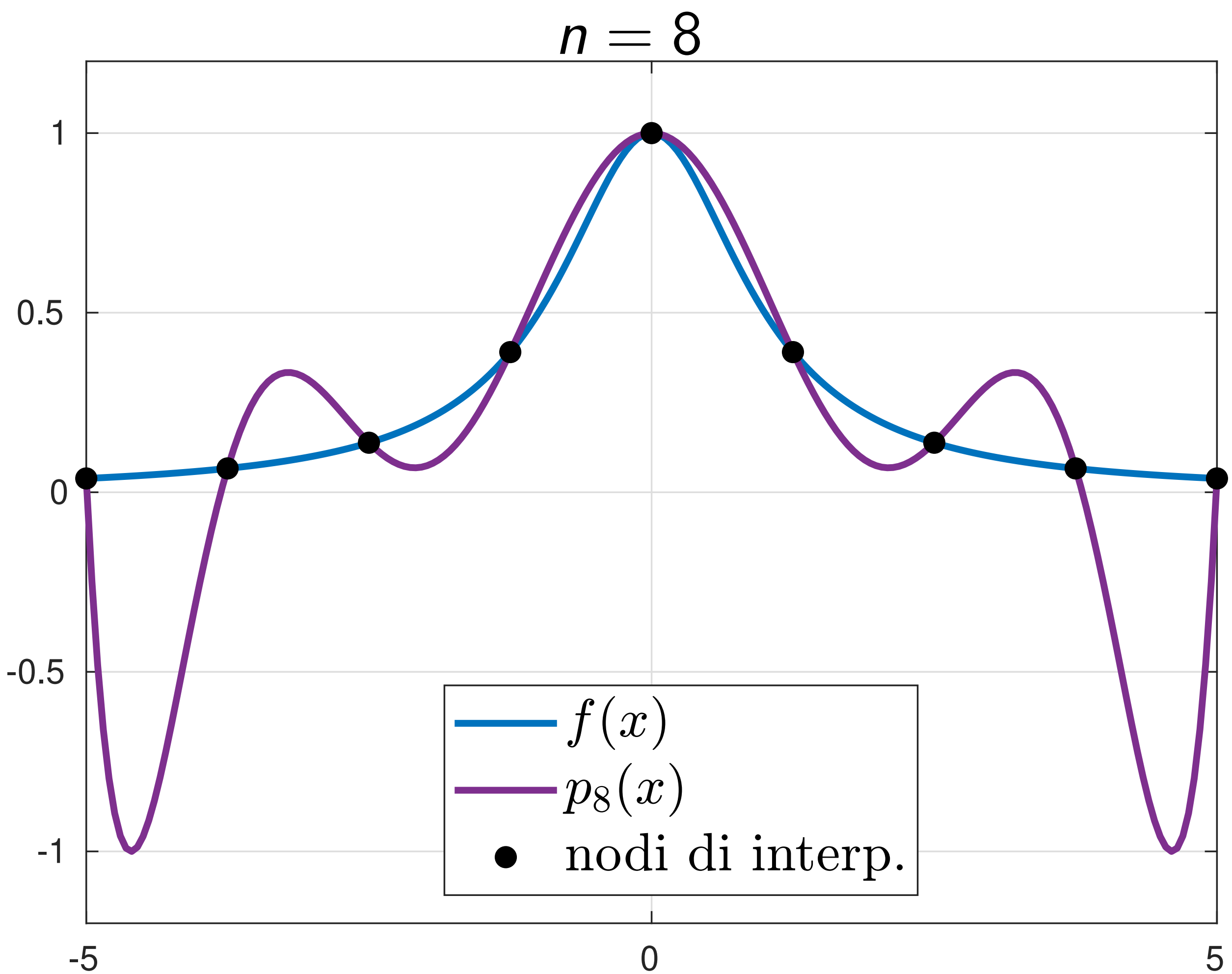
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5, 5]$.



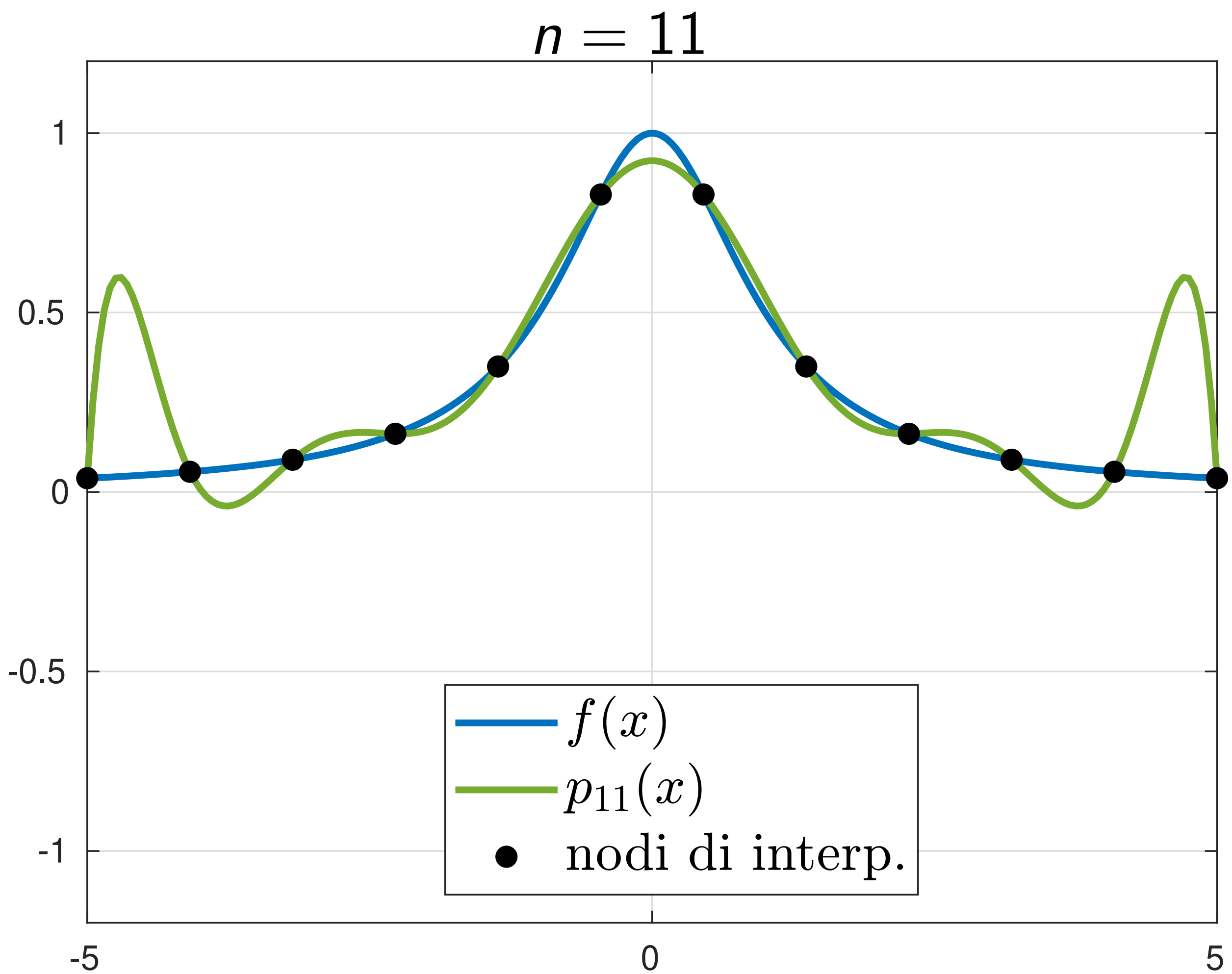
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5, 5]$.



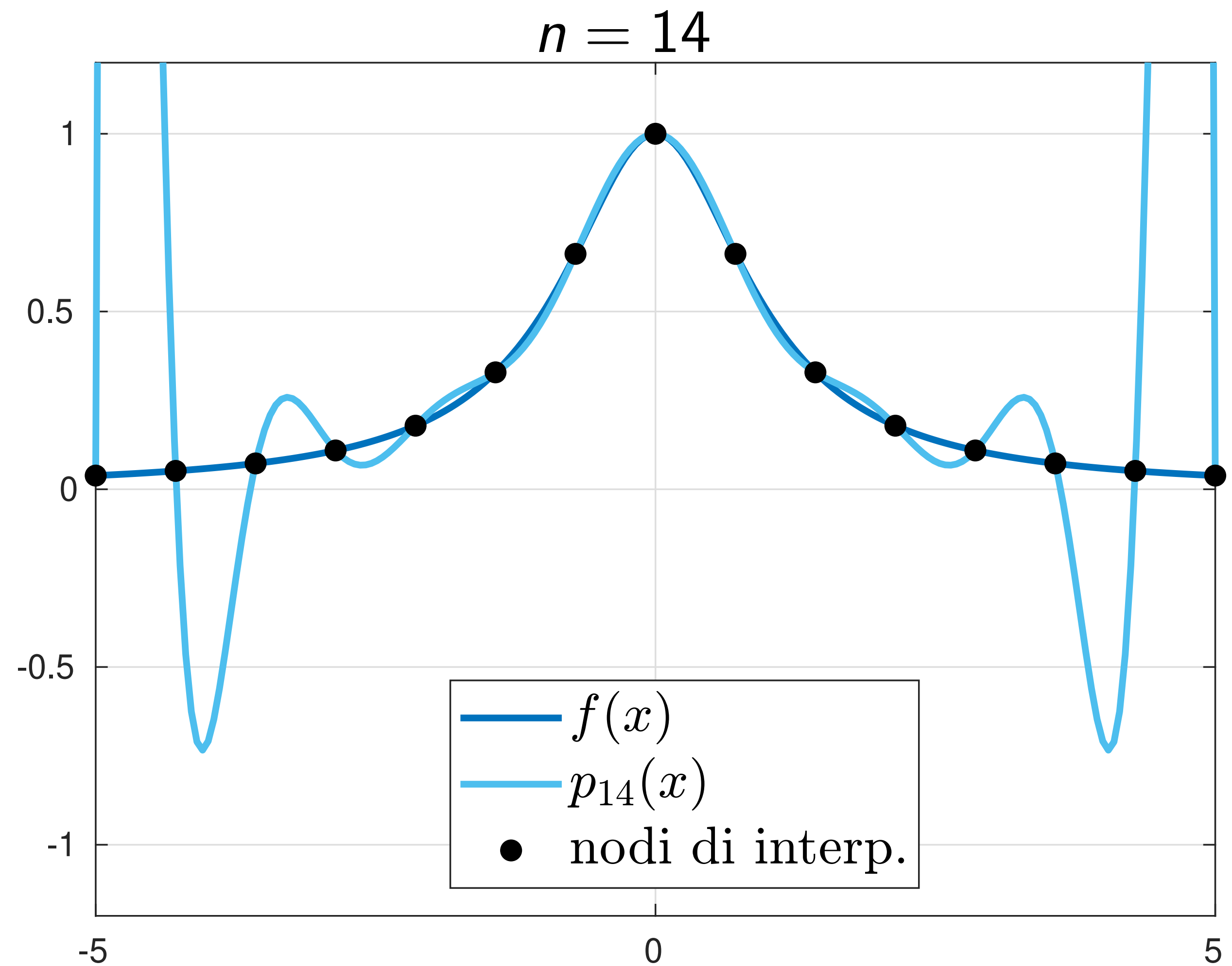
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5, 5]$.



Interpolazione globale di Lagrange

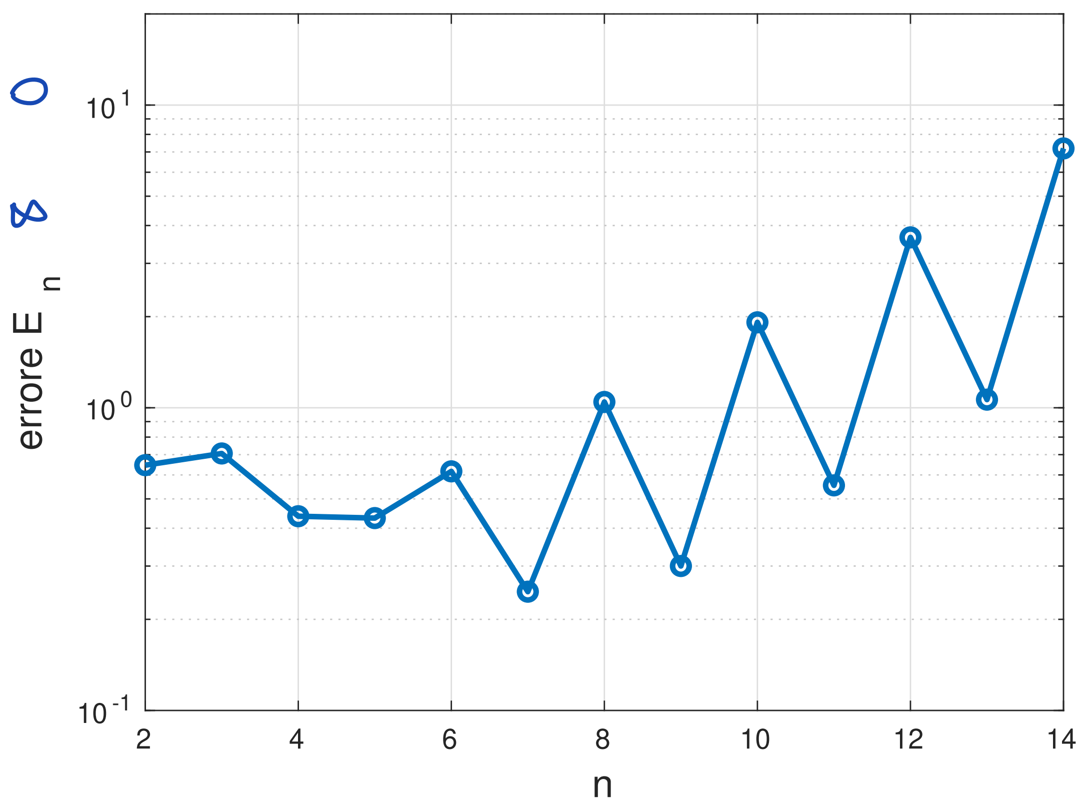
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5, 5]$.



Gli errori

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione equispaziati in $[-5,5]$.

$\|p_n - f\|_\infty \not\to 0$ per $n \to \infty$



Gli errori E_n NON stanno diminuendo quando n cresce. In questo caso l'interpolazione globale di Lagrange su nodi equispaziati fornisce una successione di polinomi $p_n(x)$, per $n \geq 1$, che NON sta convergendo alla funzione $f(x)$ quando n cresce.

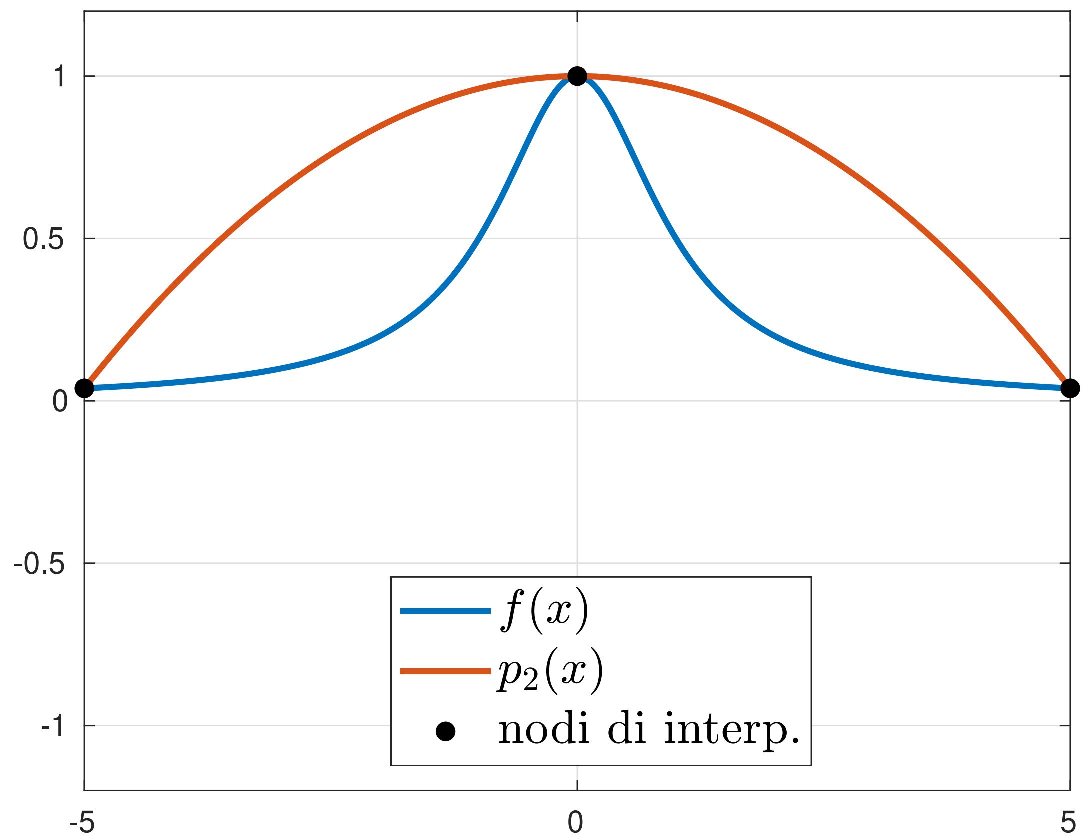
Problema 3. Data $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si vuole costruire il polinomio interpolatore di Lagrange di f in $(n+1)$ nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$ per $n = 1, \ldots, 10$.
Nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto:

$$\hat{x}_i = -cos\left(\frac{\pi \ i}{n}\right), \quad i = 0, \ldots, n, \qquad \text{in } [-1, 1]$$
$$x_i = \frac{x_b - x_a}{2}\hat{x}_i + \frac{x_b + x_a}{2}, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \text{in } [x_a, x_b]$$

Ripetere il lavoro svolto nel Problema 2.

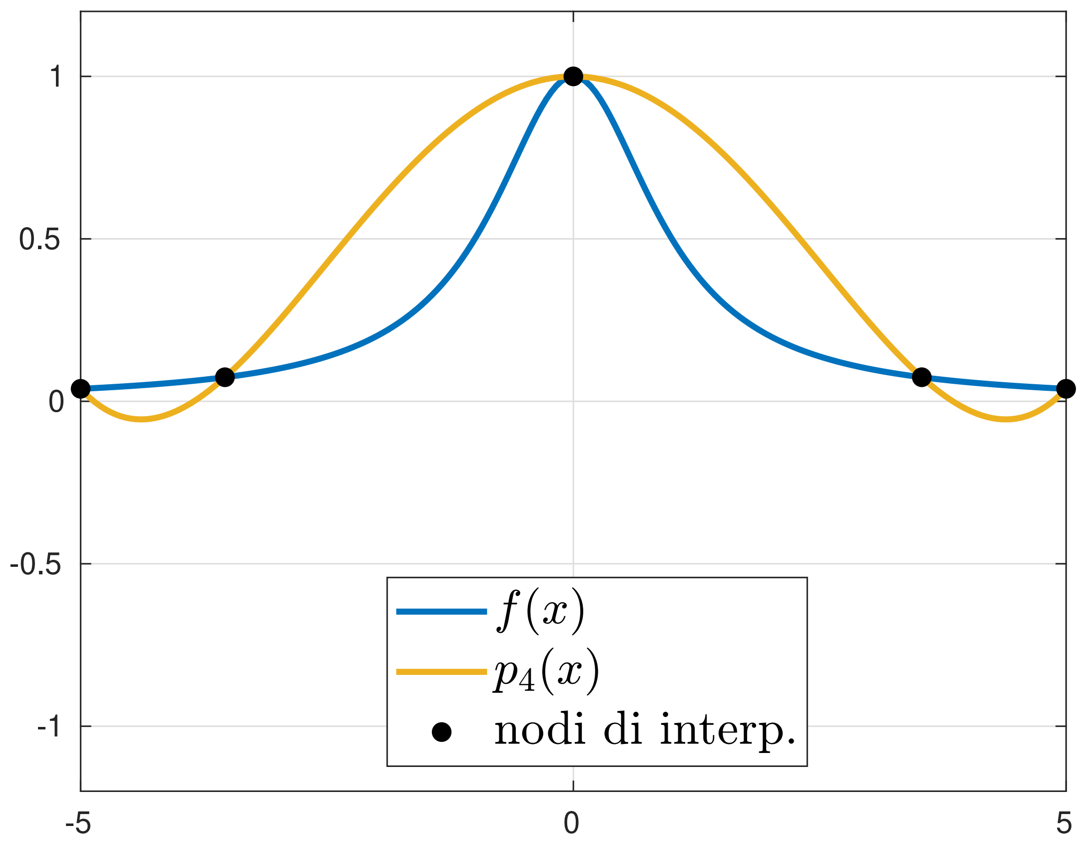
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$.



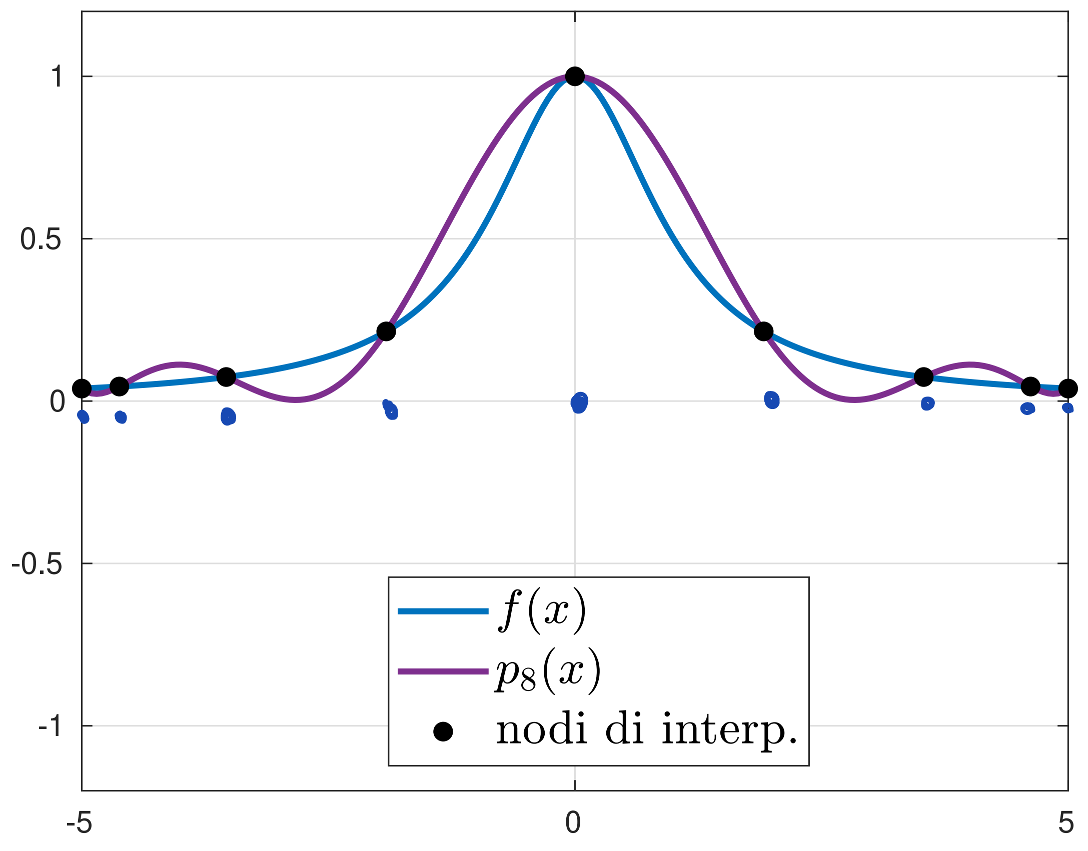
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$.



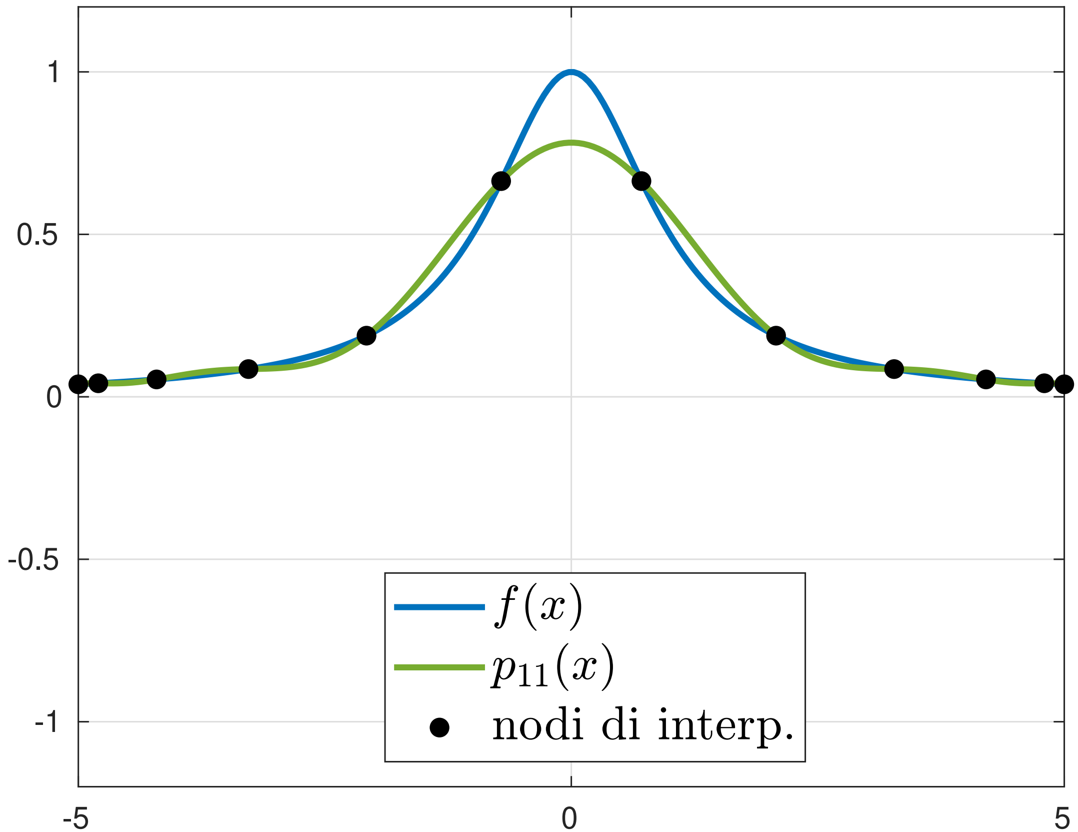
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$.



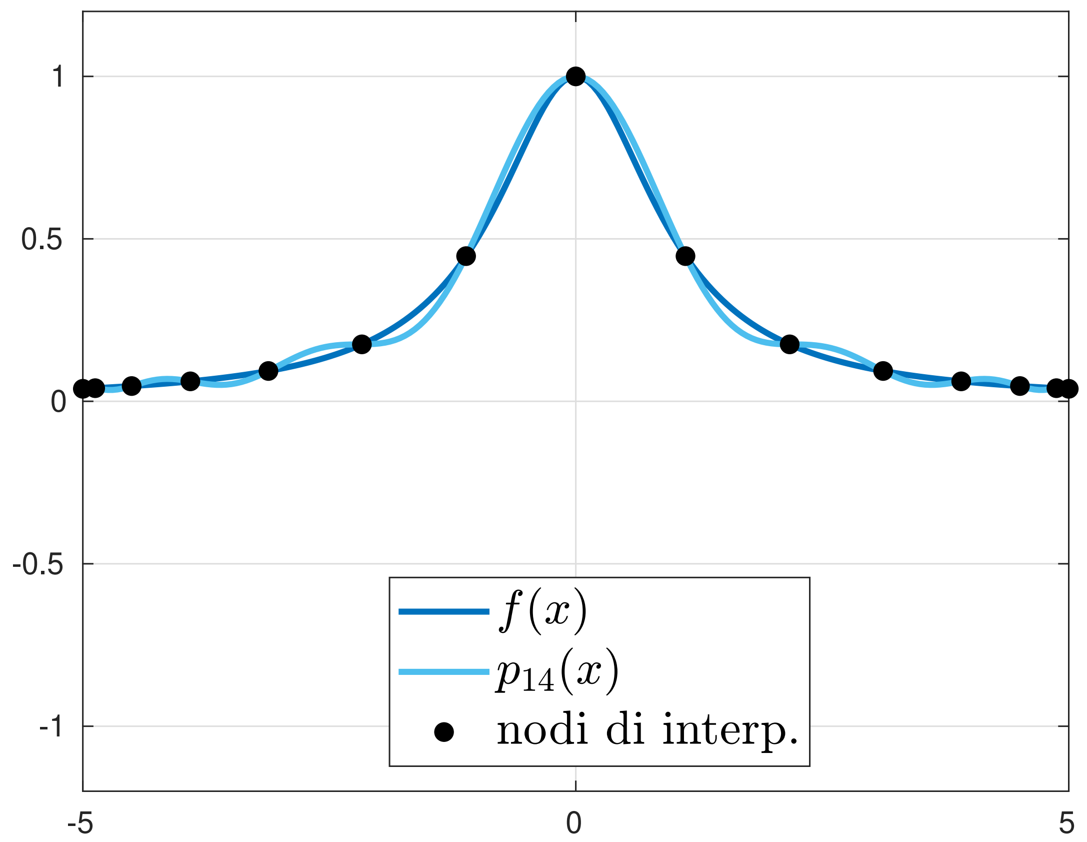
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$.



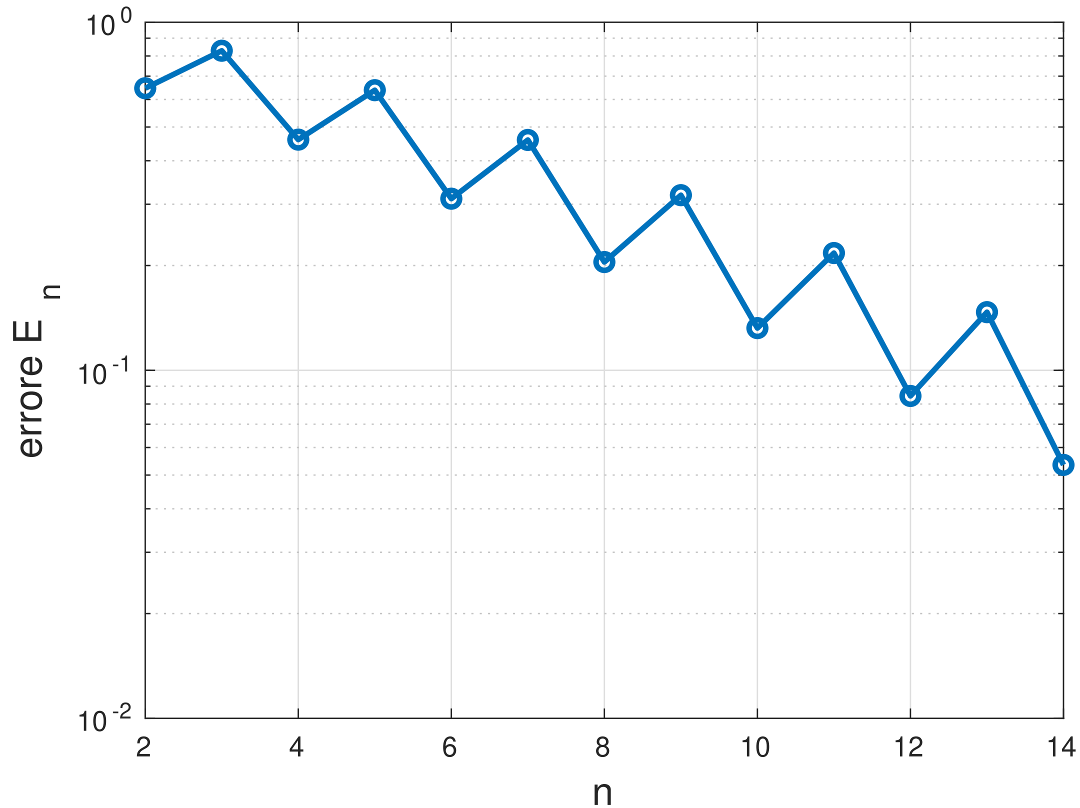
Interpolazione globale di Lagrange

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[x_a, x_b] = [-5, 5]$.



Gli errori

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p_n(x)$ su $(n+1)$ nodi di interpolazione CGL in $[-5, 5]$.



Gli errori E_n stanno tendendo a zero quando n cresce.
L'interpolazione globale di Lagrange su nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto fornisce una successione di polinomi $p_n(x)$, per $n \geq 1$, che converge alla funzione $f(x)$ quando n cresce.