METODI DI ORDINE ELEVATO
PER APPROSSIMARE EQ. DIFF. ORDINARIE

METODI RUNGE-KUTTA

Sono metodi ad un passo, che richiedono più valutazioni di $f(t, y)$ per calcolare u_{n+1}. Ne esistono di impliciti ed espliciti e di vari ordini di accuratezza.

I più noti:

RK2 (Runge Kutta esplicito di ordine 2) (coincide con Heun)

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, u_n); \\
K_2 &= f\left(t_{n+1}, u_n + hK_1\right) \\
u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)
\end{aligned}
$$

RK3 (Runge Kutta esplicito di ordine 3)

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, u_n); \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 &= f(t_{n+1}, u_n + h(2K_2 - K1)) \\
u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)
\end{aligned}
$$

RK4 (Runge Kutta esplicito di ordine 4)

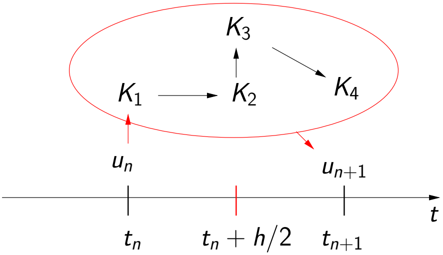
$$K_1 = f(t_n, u_n);$$

$$K_2 = f\left(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

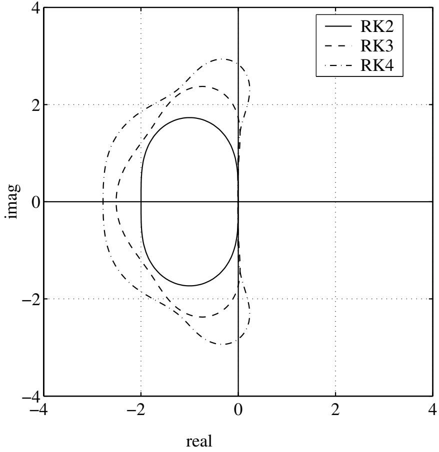
$$K_3 = f(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(t_{n+1}, u_n + hK_3)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$



Regione di assoluta stabilità per i metodi Runge-Kutta espliciti



Le regioni di ass. stab sono interne alle curve disegnate.
Esse si espandono al crescere dell'ordine.

Metodi multistep Adams

1. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_f] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   è riscritto in forma integrale, per cui la soluzione al tempo t_{n+1} è:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

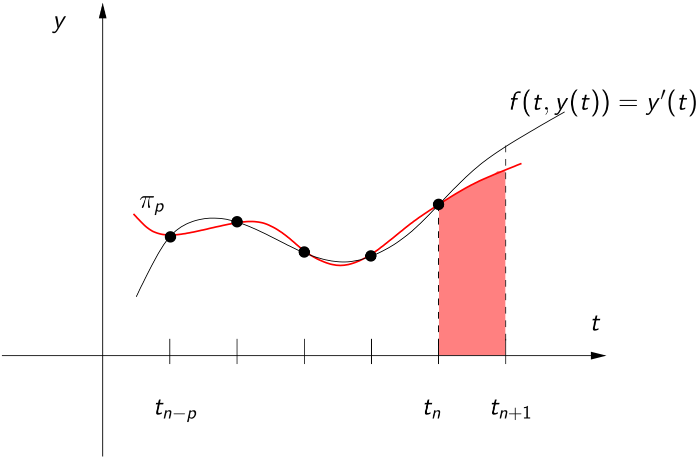
2. La funzione $f(t, y(t))$ viene vista come funzione della sola variabile t e viene interpolata con un polinomio globale di Lagrange, quindi si calcola l'integrale del polinomio interpolante.

I metodi Adams si dividono in:

- Adams Bashfort (espliciti)
- Adams Moulton (impliciti)

Metodi Adams-Bashfort

Approssimando la funzione $f(t, y(t))$ con il polinomio interpolatore di Lagrange di grado p che interpola $f(t, y(t))$ nei nodi $t_{n-p}, ..., t_n$, si ottiene un metodo Adams-Bashfort a $p+1$ passi.



Metodi Adams-Bashfort (espliciti)

AB1, $u_{n+1} = u_n + hf_n$ (=EE)

AB2, $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$

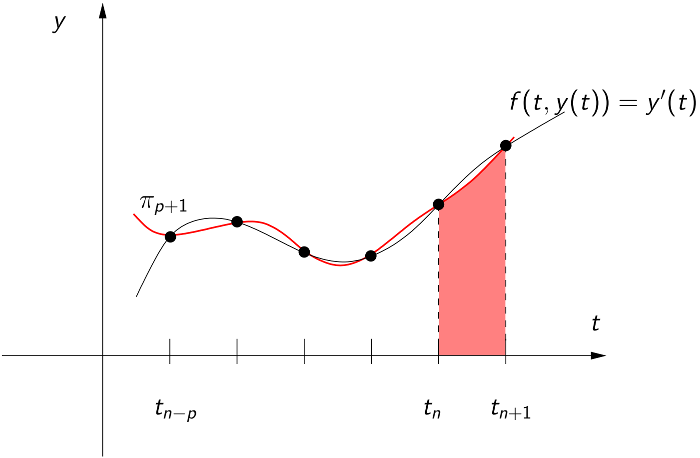
AB3, $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$

AB4, $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

Teorema.
Il metodo ABq è convergente di ordine q in h.
Osserviamo che l'ordine di convergenza coincide con il numero di passi.

Metodi Adams-Moulton

Approssimando la funzione $f(t, y(t))$ con il polinomio interpolatore di Lagrange di grado $p+1$ che interpola $f(t, y(t))$ nei nodi $t_{n-p}, ..., t_{n+1}$, si ottiene un metodo Adams-Moulton a $p+1$ passi.



Metodi Adams-Moulton (impliciti)

$$\text{AM2,} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \; (=\text{CN})$$

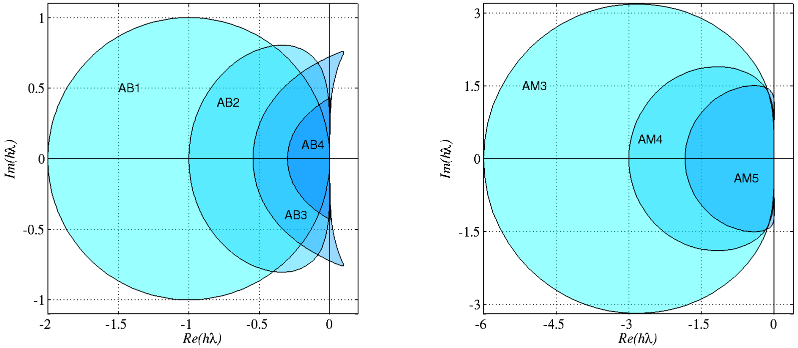
$$\text{AM3,} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$$

$$\text{AM4,} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$\text{AM5,} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3})$$

Teorema.
Il metodo AMq è convergente di ordine q in h.
Osserviamo che l'ordine di convergenza è pari al numero di passi più 1.

Regioni di assoluta stabilità dei metodi Adams



Adams-Bashfort Adams-Moulton

Le regioni di ass. stab. dei metodi Adams si restringono al crescere dell'ordine.

Barriera di Dahlquist: non esistono metodi impliciti di ordine > 2 incondizionatamente assolutamente stabili (cioè ass. stabili per ogni $h > 0$).

Metodi multistep BDF (impliciti)

BDF= Backward Differentiation Formula
Si ottengono scrivendo l'equazione differenziale al tempo t_{n+1} ed approssimando $y'(t_{n+1})$ con un rapporto incrementale all'indietro di ordine elevato.

BDF2: 2 passi, implicito, ordine 2:

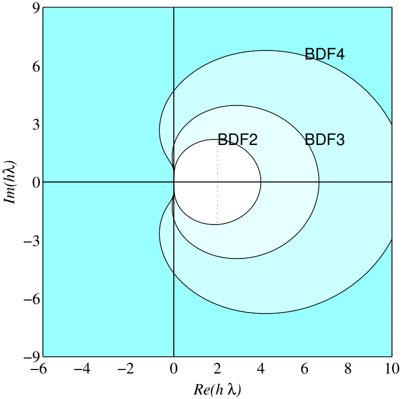
$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2h}{3}f_{n+1}$$

BDF3: 3 passi, implicito, ordine 3:

$$u_{n+1} = \frac{18}{11}u_n - \frac{9}{11}u_{n-1} + \frac{2}{11}u_{n-2} + \frac{6h}{11}f_{n+1}$$

Osservazione. BDF1=Eulero Implicito

Regioni di assoluta stabilità per alcuni BDF



Le regioni di assoluta stabilità sono esterne alle linee chiuse.
Esse si restringono al crescere dell'ordine del metodo.

Dati iniziali per i metodi multistep

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

ha un solo dato iniziale, ma per innestare un metodo multistep a $p+1$ passi servono $p+1$ valori $(u_0,\ u_1, \ldots, u_p)$ per poter calcolare il primo valore possibile u_{n+1}.

I valori $u_1, \ldots, u_p$ devono essere calcolati con un metodo ad un passo, almeno dello stesso ordine del metodo multistep che si sta utilizzando.

Esempio. AB3 $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$. È un metodo di ordine 3 a 3 passi. Serve conoscere $u_0,\ u_1,\ u_2$.
$u_0 = y_0$ è il dato iniziale del problema di Cauchy.
$u_1,\ u_2$ possono essere calcolati con RK3 (metodo ad un passo dello stesso ordine di AB3).
A partire da $n = 2$ possiamo calcolare u_{n+1} con AB3:
$u_3 = u_2 + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0)$
$u_4 = u_3 + \frac{h}{12}(23f_3 - 16f_2 + 5f_1)$ ....

METODI PREDICTOR CORRECTOR

Obiettivo: risolvere un'equazione con un metodo implicito, ma non si vuole risolvere un'equazione non lineare con Newton o punto fisso.

Alternativa

1. FASE DI PREDIZIONE: si dà un primo valore approssimato di u_{n+1} calcolato con un metodo esplicito: (ad es. EE)

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n)$$

2. FASE DI CORREZIONE: si corregge il valore $\tilde{u}_{n+1}$ con il metodo implicito:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}))$$

$$u_n \quad \underset{\substack{\textit{esplicito} \\ \textit{(predictor)}}}{\longrightarrow} \quad \tilde{u}_{n+1} \quad \underset{\substack{\textit{implicito} \\ \textit{(corrector)}}}{\longrightarrow} \quad u_{n+1}$$

Il metodo Predictor-Corrector EE+CN = Heun = RK2 (=AB1+AM2) è:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})) \end{cases}$$

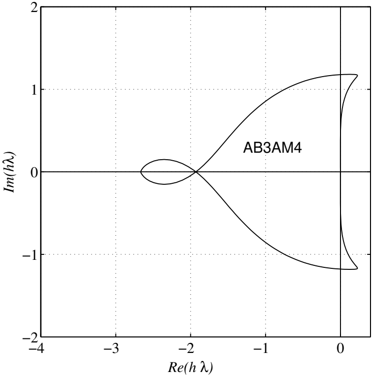
Il metodo Predictor-Corrector AB2+AM3 è:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}\Big(5f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}) + 8f(t_n, u_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -f(t_{n-1}, u_{n-1})\Big) \end{cases}$$

Teorema Se il metodo predictor (esplicito) ha ordine di convergenza q ed il corrector (implicito) ha ordine di convergenza $q+1$, allora il metodo predicor-corrector ha ordine $q+1$.

Per quanto riguarda l'**assoluta stabilità** del metodo predictor-corrector, non esiste una regola generale che dia automaticamente l'espressione della regione di Assoluta stabilità. Bisogna lavorare nel dettaglio, metodo per metodo.

In genere la regione di ass. stab. di un metodo predictor-corrector è più estesa della regione di ass. stab. del predictor ed è meno estesa della regione di ass. stab. del corrector.



Le function matlab più utilizzate (richiamate anche da simulink)

`[tn,un]=ode45(odefun,[t0,tf],y0);` implementa una coppia di metodi Runge-Kutta espliciti di ordine 4 e 5, con **adattività del passo**. Il metodo è del quarto ordine e ad un passo.

`[tn,un]=ode23(odefun,[t0,tf],y0);` implementa una coppia di metodi Runge-Kutta espliciti di ordine 2 e 3, con **adattività del passo**. Il metodo è del secondo ordine e ad un passo.

`[tn,un]=ode113(odefun,[t0,tf],y0);` implementa una coppia di metodi Adams Bashforth-Moulton, nella forma Predictor-Corrector, con **adattività del passo**. Non è specificato l'ordine di convergenza. Metodo multistep.

`[tn,un]=ode115s(odefun,[t0,tf],y0);` implementa una formula BDF con **adattività del passo**. Non è specificato l'ordine di convergenza. Metodo multistep.