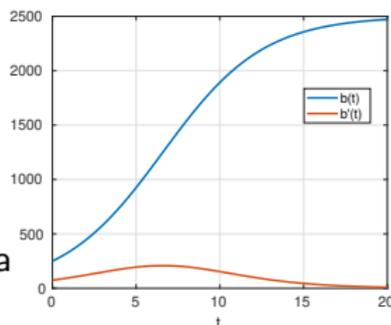


# Un problema di ottimizzazione

**Dinamica delle popolazioni.** Una colonia di 250 esemplari di batteri viene posta in un ambiente isolato e si riproduce seguendo il modello di Verhulst

$$b(t) = \frac{2500}{1 + 9e^{-t/3}}, \quad t > 0,$$

dove  $t$  rappresenta il tempo (espresso in giorni) trascorso a partire dal tempo  $t = 0$  di inizio della coltura. Si vuole determinare dopo quanti giorni dall'inizio della coltura si ha il massimo incremento della numerosità della popolazione.



**Modello di Verhulst:** la numerosità  $b(t)$  della popolazione cresce tendendo asintoticamente ad un certo valore detto *capacità portante*. Da un certo punto in poi, maggiore è la numerosità e minore è la crescita della numerosità stessa a causa di competizioni interne per spazio e nutrimento. Qui la capacità portante è  $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 2500$ .

l'incremento della numerosità è  $b'(t)$ .

## Svolgimento

Dobbiamo trovare il punto di massimo di  $b'(t)$ . Dal grafico vediamo che il punto di massimo di  $b'(t)$  è l'unico punto stazionario di  $b'(t)$ , ovvero tale che  $(b')' = 0$ . Quindi poniamo

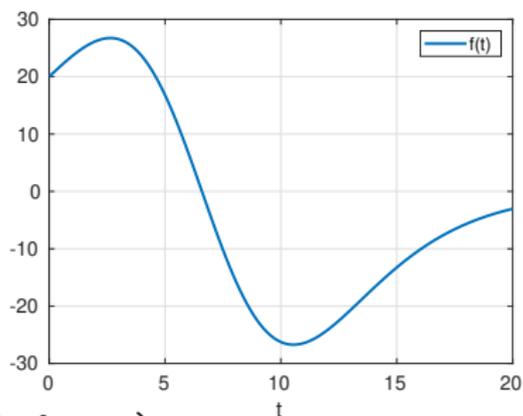
$$f(t) = b''(t)$$

e calcoliamo l'unica radice di  $f(t) = 0$ .

Per calcolare velocemente  $b''(t)$  :

```
syms t % t variabile simbolica
b=2500/(1+9*exp(-t/3)); % b e' una funzione simbolica
b2=diff(b,2); % calcolo b'' simbolicamente
f=matlabFunction(b2); % trasformo b2 in function hand
```

Rappresentare graficamente  $f$ ,  
localizzare la radice,  
definire i dati e richiamare il metodo delle secanti.



Le istruzioni

```
x0=5; x1=9;
tol=1e-8; kmax=20;
[z,res,k]=secanti(f,x0,x1,tol,kmax)
```

producono

```
z =
    6.591673732008658e+00
res =
    2.842170943040401e-14
k =
    5
```

Il massimo incremento della numerosità si ha dopo 6.59 giorni  
dall'inizio della coltura.

## Esercizio:

Calcolare il punto di minimo della funzione  $h(x) = (x - 5)^2 - 3 \sin(x - 5)$  con  $x \in [0, 10]$  utilizzando il metodo di Newton, prendendo prima  $x^{(0)} = 0$  e poi  $x^{(0)} = 1$ .  
Confrontare il numero di iterazioni necessarie per arrivare a convergenza avendo preso la stessa tolleranza per il test d'arresto e capire perché il numero di iterazioni richieste dal metodo di Newton è così diverso nei due casi.