METODI DI PUNTO FISSO

Sia $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ continua.

Def. α è punto fisso per φ se $\boxed{\varphi(\alpha) = \alpha}$

Il metodo di punto fisso è:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \qquad \text{per } k \geq 0 \end{cases}$$

Scrivere una function per l'approssimazione di un punto fisso α di φ.

INPUT: `phi, x0, tol, nmax`

OUTPUT: `alpha, niter, errori`

`alpha`: approssimazione del punto fisso

`niter`: numero iterazioni per soddisfare il test d'arresto

`errori`: vettore degli errori $\mathtt{err}_k = ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$. per `k=1,...,niter`

Esercizio (era un tema d'esame)

Si consideri il problema di approssimare numericamente il valore $\sqrt{2}$, che equivale a calcolare la radice positiva di $f(x) = x^2 - 2$.
A tale proposito si considerino le seguenti funzioni di punto fisso:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} \\ \varphi_2(x) &= -x^2 + x + 2 \\ \varphi_3(x) &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Dire se le funzioni di punto fisso proposte sono adeguate per il calcolo della radice positiva di f, giustificando le risposte date.
b) Verificare numericamente quanto affermato al punto a), scrivendo una function matlab che, dati in input `phi` (l'espressione della funzione φ), `x0` (il punto iniziale x_0), `tol` (la tolleranza per il test d'arresto) e `nmax` (il numero massimo di iterazioni), costruisca la successione $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ (φ è una qualsiasi delle tre funzioni di punto fisso date in (1)). In particolare fissare `tol`$=10^{-12}$ e `nmax=100` e, a parità di `x0`, dire se i metodi (convergenti) sono equivalenti o meno, quale è preferibile e perchè. Si può dedurre qualche informazione sull'ordine di convergenza delle successioni $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ al valore $\sqrt{2}$?

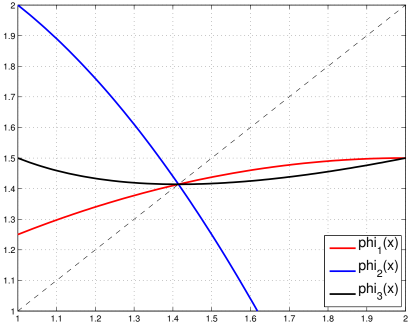
Svolgimento a) Anzitutto bisogna verificare che le funzioni di punto fisso assegnate ammettano $\sqrt{2}$ come punto fisso.

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}, \qquad \varphi_1(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} \quad \to OK$$

$$\varphi_2(x) = -x^2 + x + 2, \qquad \varphi_2(\sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2} \quad \to OK$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \qquad \varphi_3(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \to OK$$

Tutte e tre le funzioni ammettono come punto fisso il valore $\sqrt{2}$.
A questo punto rappresentiamo graficamente le funzioni di punto fisso e vediamo SE $|\varphi'(\alpha)| < 1$, oppure SE esiste un intorno $I(\alpha)$ t.c. $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in I(\alpha)$.
Se questa condizione è soddisfatta, sappiamo dal teorema di OSTROWSKI, che se $x^{(0)}$ è suff. vicino ad α, allora la successione generata con punto fisso converge ad α.



Per le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_3(x)$ la condizione che garantisce la convergenza è soddisfatta (lo si vede dal grafico), per cui le successioni $x^{(k+1)} = \varphi_1(x^{(k)})$ e $x^{(k+1)} = \varphi_3(x^{(k)})$ convergono ad α, preso $x^{(0)}$ vicino.

Per la funzione $\varphi_2(x)$, ad occhio non si vede molto bene se la condizione sulla derivata prima è soddisfatta. Possiamo valutare $\varphi_2'(\alpha)$.

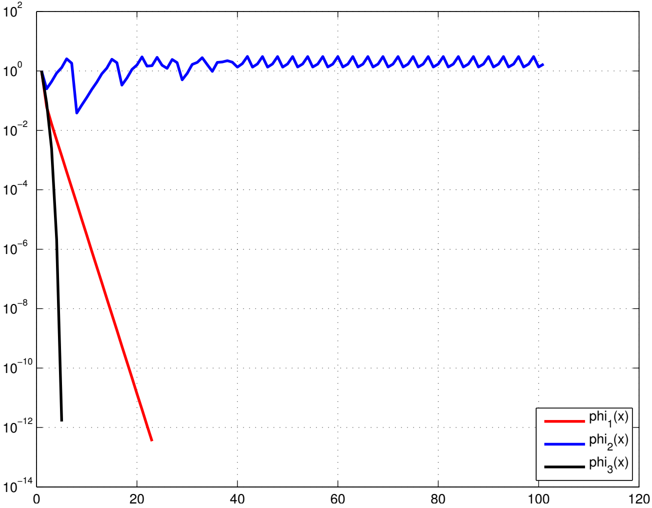
$\varphi_2(x) = -x^2 + x + 2$, $\varphi_2'(x) = -2x + 1$, da cui si ha $\varphi_2'(\alpha) = -2\sqrt{2} + 1 < -1$. QUINDI φ_2 non produrrà una successione convergente ad α.

Definiamo i dati, richiamiamo la function di punto fisso e rappresentiamo in scala semilogaritmica gli errori:

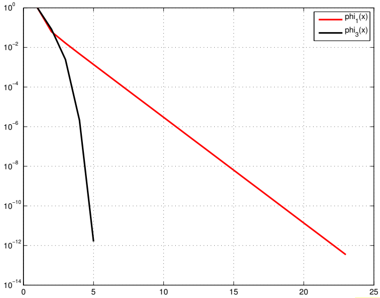
```
phi1=@(x)-x.^2/4+x+0.5;
x0=1.5; tol=1.e-12; nmax=100;
[alpha1,niter1,err1]=pfisso(phi1,x0,tol,nmax);
figure(1); clf
semilogy(err1,'r','Linewidth',2);
grid on
```

Fare lo stesso lavoro con le altre funzioni $\varphi_2(x)$ e $\varphi_3(x)$.

Il grafico delle storie di convergenza è:



e si vede che la successione generata con φ_2 non converge, le altre due convergono.



Dalla teoria sappiamo che se $\varphi'(\alpha) \neq 0$ allora il metodo converge linearmente.
Se $\varphi'(\alpha) = 0$ allora il metodo converge quadraticamente.

Facendo i conti per φ_1 si ha $\varphi_1'(\alpha) = 1/2$, ovvero ci si attende una convergenza lineare. Effettivamente il grafico degli errori generati da φ_1 decresce linearmente e richiede 23 iterazioni per soddisfare il test d'arresto.

Facendo i conti per φ_2 si ha $\varphi_2'(\alpha) = 0$, ovvero ci si attende una convergenza quadratica. Effettivamente il grafico degli errori generati da φ_2 decresce più che linearmente (sembra una parabola) e richiede 5 iterazioni per soddisfare il test d'arresto.

Per concludere: scrivere esplicitamente il metodo di Newton qualora $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Con quale metodo di punto fisso coincide tra i tre proposti nel tema?

Svolgimento.

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - 2}{2x^{(k)}} \\ &= \frac{2(x^{(k)})^2 - (x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}} = \\ &= \frac{x^{(k)}}{2} - \frac{2}{x^{(k)}} = \varphi_3(x^{(k)}). \end{aligned}$$