

Stabilità su intervalli illimitati

Esercizio 1.

Si consideri il problema lineare modello

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) & t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Determinare su carta il valore h_0 tale che, per ogni $h \in (0, h_0)$, Eulero esplicito sia assolutamente stabile nella risoluzione di questo problema.
2. Calcolare e rappresentare le soluzioni numeriche ottenute con $h = 0.01$, $h = 0.1$, $h = 1$, $h = 2$. Verificare numericamente che per i valori di $h < h_0$ il metodo è assolutamente stabile.
3. Calcolare e rappresentare le soluzioni numeriche ottenute con i metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicolson con $h = 0.01$, $h = 0.1$, $h = 1$, $h = 2$.
4. I risultati numerici riflettono la teoria? Commentare i risultati ottenuti.

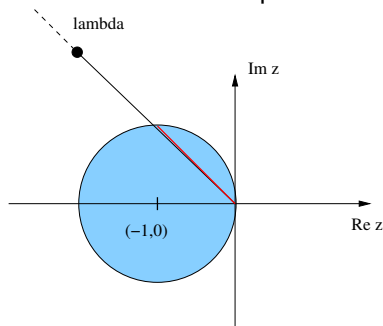
Per un qualsiasi metodo si definisce la
REGIONE DI ASSOLUTA STABILITA' come l'insieme

$$\mathcal{A} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |u_n| \rightarrow 0 \text{ per } t_n \rightarrow \infty\}$$

Per EE si ha:

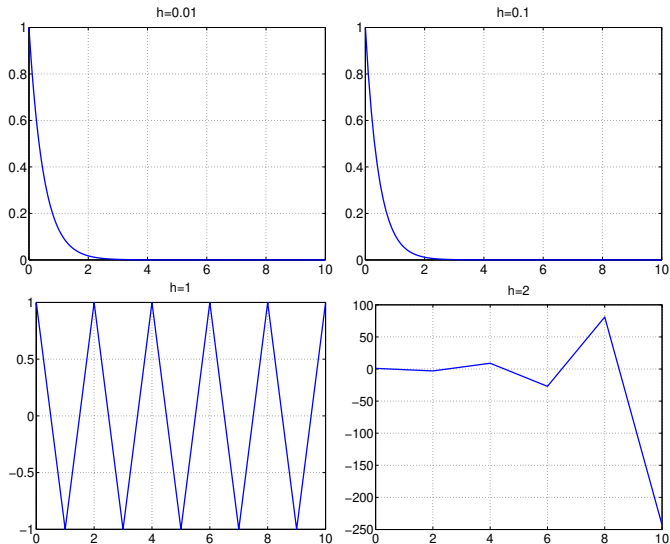
$$\mathcal{A}_{EE} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |1 + z| < 1\}$$

ovvero il cerchio del piano complesso di centro $(-1, 0)$ e raggio 1.

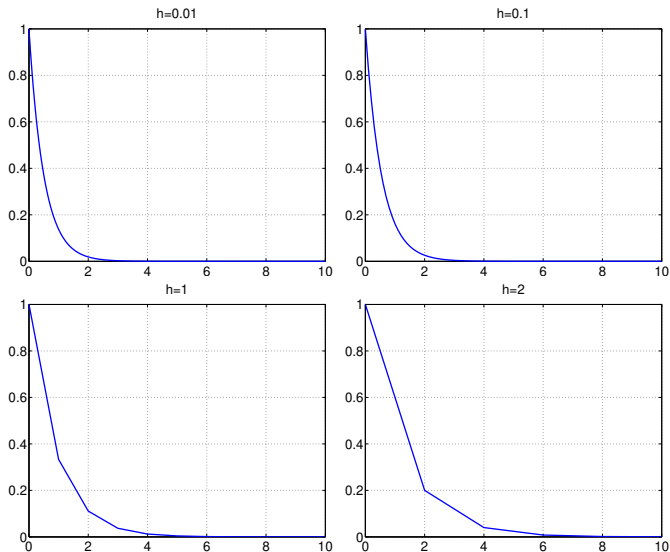


λ è assegnato, devo de-
terminare quali sono i
valori di h che danno as-
soluta stabilità

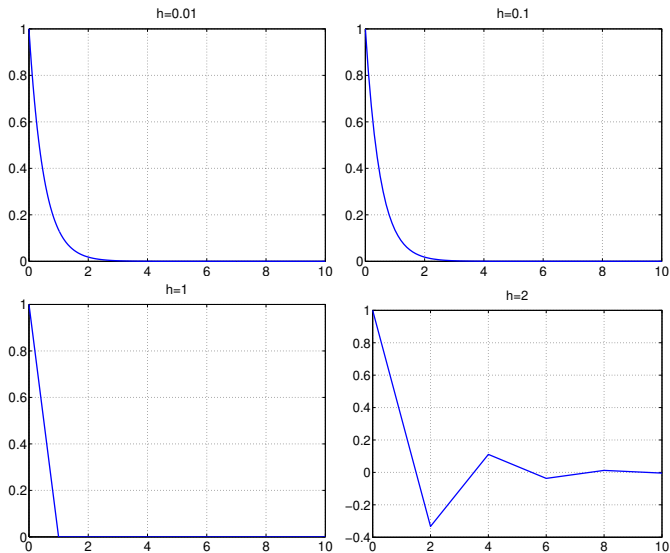
Soluzione del punto 2. Eulero esplicito



Soluzione del punto 3. Eulero implicito



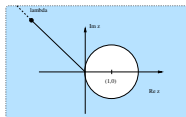
Soluzione del punto 4. Crank-Nicolson



Mentre per Eulero esplicito quando $h \geq 1$ viene a mancare l'assoluta stabilità (perchè succede che $u_n \not\rightarrow 0$ quando $t_n \rightarrow \infty$), le soluzioni ottenute con Eulero implicito e Crank-Nicolson vanno a zero per $t_n \rightarrow \infty$.

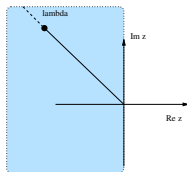
Eulero implicito e Crank-Nicolson sono assolutamente stabili per ogni $h > 0$.

La **regione di assoluta stabilità di Eulero implicito** è la regione esterna alla circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1 (la zona azzurra è in realtà illimitata)



$$\mathcal{A}_{EI} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |1 - z| > 1\}$$

La **regione di assoluta stabilità di Crank-Nicolson** è tutto il semipiano di parte reale strettamente negativa (la zona azzurra è in realtà illimitata)



$$\mathcal{A}_{CN} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |2+z|/|2-z| < 1\}$$

Problemi con soluzione periodica

Quando $\lambda = \text{Im}(\lambda) i$ è puramente immaginario, la soluzione di $y' = \lambda y$ è una funzione complessa periodica $y(t) = e^{\lambda t} = \cos(\text{Im}(\lambda t)) + i \sin(\text{Im}(\lambda t))$ e

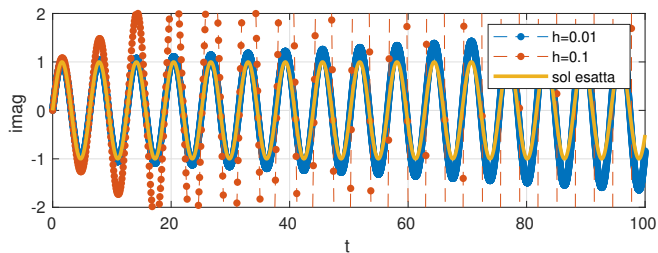
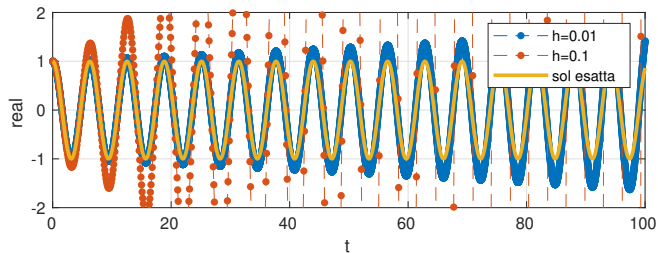
$$|y(t)| = \sqrt{\cos^2(\text{Im}(\lambda t)) + \sin^2(\text{Im}(\lambda t))} = 1, \quad \forall t.$$

Non ha senso parlare di soluzione che va a zero per $t \rightarrow \infty$ e quindi di regione di stabilità assoluta. Tuttavia è interessante analizzare come si comportano i metodi quando $t_n \rightarrow \infty$. Sarebbe opportuno che la soluzione numerica rifletta il comportamento della soluzione esatta, cioè che $|u_n| = 1$ per ogni t_n .

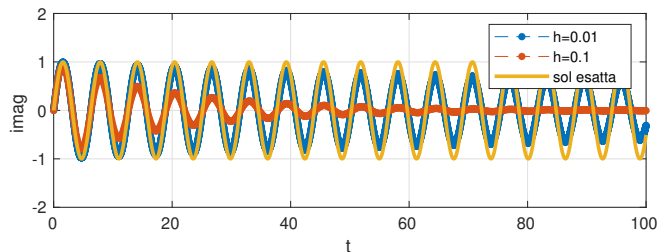
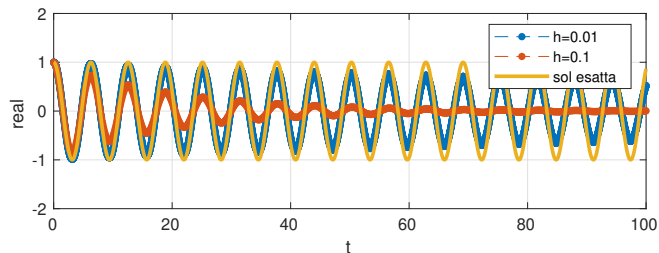
<i>metodo</i>	<i>periodicità'</i>	$\lambda = i$
EE : $u_n = (1 + h\lambda)^n u_0$	$\rightarrow u_n = 1 \Leftrightarrow 1 + h\lambda = 1$	$\Leftrightarrow h = 0$
EI : $u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} u_0$	$\rightarrow u_n = 1 \Leftrightarrow 1 - h\lambda = 1$	$\Leftrightarrow h = 0$
CN : $u_n = \left(\frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}\right)^n u_0$	$\rightarrow u_n = 1 \Leftrightarrow \frac{ 2 + h\lambda }{ 2 - h\lambda } = 1$	$\Leftrightarrow \forall h > 0$

Conclusione: EE e EI non sono buoni metodi per approssimare le soluzioni periodiche, mentre CN è un ottimo metodo.

$\lambda = i$, Eulero esplicito



$\lambda = i$, Eulero implicito



$\lambda = i$, Crank-Nicolson

