# METODO DI EULERO ESPLICITO

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \end{cases} \tag{1}$$

Scrivere una function

`[tn,un]=eulero_esp(odefun,tspan,y0,Nh)`

INPUT:

`odefun`: espressione della $f$

`tspan=[t0,T]`: vettore di 2 componenti: istante iniziale e finale dell'intervallo

`y0`: valore scalare: la condizione iniziale

`Nh`: numero (intero) di passi temporali ($Nh$ è tale che $T = t_{Nh}$).

OUTPUT:

`tn`: vettore colonna contenente gli istanti temporali da $t_0$ a $t_{Nh}$.

`un`: vettore colonna contenente la soluzione numerica negli istanti temporali $t_n$.

N.B. esprimere $f$ in funzione di due variabili $t$ e $y$ con $y$ non dipendente da $t$.
ES: $f(t, y) = t - y(t)$: diventa `f=@(t,y)t-y`

N.B. Generare il vettore dei `tn` con il comando `linspace`:
`tn=linspace(tspan(1),tspan(2),Nh+1);`
Inizializzare il vettore `un` della stessa dimensione di `tn`
e memorizzare nella prima componente di `un` il valore di $y_0$.
Con un ciclo costruire sequenzialmente le componenti del vettore `un`

# Esercizio 1

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t - y & t \in (-1, 3] \\ y(-1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

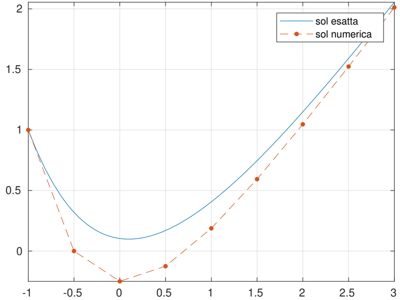
Scrivere un m-file che:
1) richiami la function `eulero_esp.m` con $h = 0.5$ (calcolare $N_h = (T - t0)/h$ e prendere la parte intera (usare `fix`, `ceil`, `round`));
2) rappresenti graficamente la soluzione numerica e quella esatta (fuori dalla function `eulero_esp.m`).
La soluzione esatta è: $y(t) = t - 1 + 3e^{-(t+1)}$.
3) calcoli l'errore

$$e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$$

(fuori dalla function `eulero_esp.m`) e stamparlo a video

Sol. Si ottiene `err=0.3536`

I grafici della soluzione numerica e di quella esatta sono:



# Esercizio 2

Ripetere il lavoro dell'esercizio precedente con $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$.

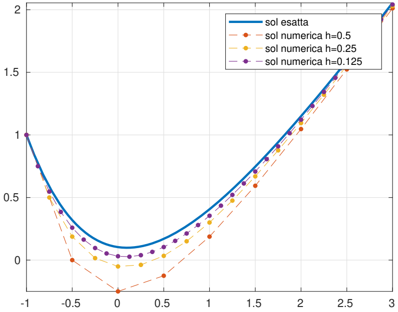
Per ogni valore di $h$ rappresentare le soluzioni numeriche trovate, calcolare e stampare a video l'errore $e_h = \max_{n=0,\ldots,N_h} |y(t_n) - u_n|$.

Domande:

1. Dimezzando $h$, cosa succede all'errore?
2. Come dipende l'errore $e_h$ da $h$ per $h \to 0$?

Rappresentare su un grafico loglog gli errori $e_h$ al variare di $h$, considerare anche valori di $h < 0.125$.

# Le soluzioni numeriche




Quando $h$ diminuisce, la soluzione numerica si avvicina alla soluzione esatta.

**Questa è la CONVERGENZA del metodo numerico: la soluzione numerica converge alla soluzione esatta nella norma del massimo su tutto l'intervallo.**

# METODO DI EULERO IMPLICITO

$$\begin{cases} u_0 \text{ dato} \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}), \quad 0 \le n \le N_h - 1 \end{cases} \tag{3}$$

`[tn,un]=eulero_imp(odefun,tspan,y0,Nh)`

INPUT:
`odefun`: espressione della $f$
`tspan=[t0,T]`: vettore con istante iniziale e finale dell'intervallo
`y0`: valore scalare: la condizione iniziale
`Nh`: numero intero di passi temporali ($Nh$ è tale che $T = t_{Nh}$).
OUTPUT:
`tn`: vettore colonna contenente gli istanti temporali da $t_0$ a $t_{Nh}$.
`un`: vettore colonna contenente la soluzione numerica negli istanti temporali $t_n$.

Ad ogni passo $t_n$ dobbiamo risolvere l'equazione non lineare con incognita $u_{n+1}$:

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ & \Updownarrow & \\ r(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - hf(t_{n+1}, u_{n+1}) & = & 0 \end{array}$$

Attenzione: la funzione $r$ cambia ad ogni passo $t_n$ perchè dipende da $u_n$ e da $t_{n+1}$.

L'equazione non lineare $r(u_{n+1}) = 0$ può essere risolta con secanti.

Utilizziamo la function `secanti.m` (o `secant.m`)

```
[z,res,it]=secanti(fun,x0,x1,tol,kmax)
```

Cosa prendiamo come `x0` e `x1`?
Al primo passo temporale poniamo $x^{(1)} = u_0$ e $x^{(0)} = u_0 + h$.
Per i successivi passi temporali poniamo $x^{(1)} = u_n$ e $x^{(0)} = u_{n-1}$.

```
n=1
r=@(x)x-un(n)-h*odefun(tn(n+1),x);
un(n+1)=secanti(r,un(n)+h,un(n),tol,kmax);

for n=2:Nh
    r=@(x)x-un(n)-h*odefun(tn(n+1),x);
    un(n+1)=secanti(r,un(n-1),un(n),tol,kmax);
end
```

# Esercizio 3.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t - y & t \in (-1, 3] \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

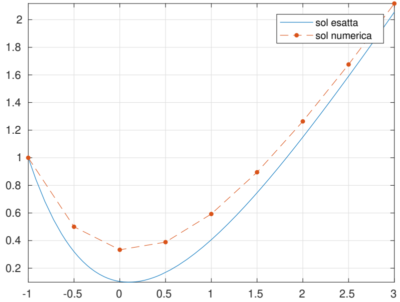
Scrivere un m-file che:
1) richiami la function `eulero_imp.m` con $h = 0.5$ (calcolare $N_h = (T - t0)/h$ e prendere la parte intera (usare `fix`, `ceil`, `round`));
2) rappresenti graficamente la soluzione numerica e quella esatta (fuori dalla function `eulero_imp.m`).
La soluzione esatta è: $y(t) = t - 1 + 3e^{-(t+1)}$.
3) calcoli l'errore

$$e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$$

(fuori dalla function `eulero_imp.m`) e stamparlo a video

Sol. Si ottiene `err=0.2297`

I grafici della soluzione numerica e di quella esatta sono:



# Esercizio 4

Ripetere il lavoro dell'esercizio precedente con $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$.

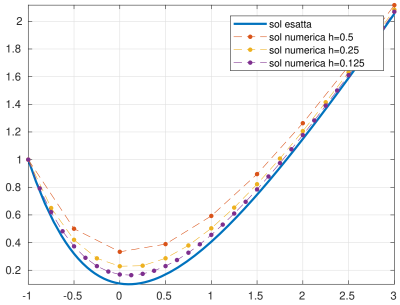
Per ogni valore di $h$ rappresentare le soluzioni numeriche trovate, calcolare e stampare a video l'errore $e_h = \max_{n=0,\dots,N_h} |y(t_n) - u_n|$.

Domande:

1. Dimezzando $h$, cosa succede all'errore?
2. Come dipende l'errore $e_h$ da $h$ per $h \to 0$?

Rappresentare su un grafico loglog gli errori $e_h$ al variare di $h$, considerare anche valori di $h < 0.125$.

# Le soluzioni numeriche




Quando $h$ diminuisce la soluzione numerica si avvicina alla soluzione esatta.

**Questa è la CONVERGENZA del metodo numerico: la soluzione numerica converge alla soluzione esatta nella norma del massimo su tutto l'intervallo.**