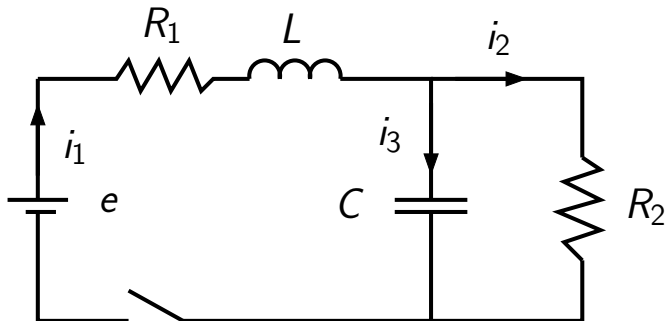


## Approssimazione del potenziale ai capi di un condensatore all'interno di un circuito elettrico.

Si consideri il circuito rappresentato in figura:

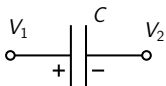


Si vuole approssimare l'andamento della differenza di potenziale  $v(t)$  ai capi del condensatore  $C$  a partire dal tempo  $t = 0$  in cui viene chiuso il circuito.

# Leggi fisiche

- $i = \frac{dQ}{dt}$  (legame intensità - carica),

- $Q = C(V_1 - V_2)$



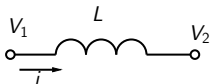
- $V_1 - V_2 = iR$  (legge di Ohm),



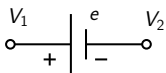
- 1a legge di Kirchhoff:  $\sum_k i_k = 0$  in ogni nodo della rete

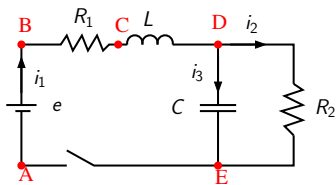
- 2a legge di Kirchhoff:  $\sum_k (\Delta V)_k = 0$  in ogni maglia chiusa della rete

- $V_1 - V_2 = L \frac{di}{dt}$



- $V_1 - V_2 = e$





2a legge di Kirchoff sulla maglia sinistra:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_A) = 0$$

$$-e + i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt} + v + 0 = 0$$

da cui  $L \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - v + e$

1a legge di Kirchoff sul nodo D:  $i_1 = i_2 + i_3$ , con:

$$v = i_2 R_2, \text{ cioè } i_2 = \frac{v}{R_2}, \text{ e} \quad i_3 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

da cui  $C \frac{dv}{dt} = i_1 - \frac{v}{R_2}$

Denotando con  $i_1 = i_1(t)$  l'intensità di corrente nella prima maglia e con  $v = v(t)$  la differenza di potenziale ai capi del condensatore, applicando le leggi fisiche, otteniamo il **modello matematico**:

$$\begin{cases} v' = \frac{1}{C} \left( i_1 - \frac{v}{R_2} \right) \\ i_1' = \frac{1}{L} (-i_1 R_1 - v + e), \end{cases} \quad (1)$$

completato con le condizioni iniziali:

$$v(t_0) = 0 \text{ e } i_1(t_0) = 0.$$

$R_1$ ,  $R_2$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $e$  sono costanti nel tempo.

Facendo la sostituzione  $y_1(t) = v(t)$  e  $y_2(t) = i_1(t)$ , si ha:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{C} \left( y_2 - \frac{y_1}{R_2} \right) \\ y_2' = \frac{1}{L} (-y_2 R_1 - y_1 + e) \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Ponendo:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \left( y_2 - \frac{y_1}{R_2} \right) \\ \frac{1}{L} (-y_2 R_1 - y_1 + e) \end{bmatrix}$$

il sistema si riscrive in forma compatta:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t \geq t_0 \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Scrivere un m-file che

1. definisca i dati
2. risolva con Eulero esplicito
3. rappresenti il grafico del potenziale in funzione del tempo
4. rappresenti il grafico dell'intensità di corrente  $i_1$  in funzione del tempo.

Si prendano i seguenti dati:

$$L = 0.1, R_1 = R_2 = 10, C = 1.e - 3, e = 5.$$

$$t_0 = 0, T = .1.$$

Si consideri dapprima  $h = 0.001$ , in un secondo momento  $h = 0.005$ ,  $h = 0.01$  e  $h = 0.02$ .

Si deve **costruire una function matlab** che, dati in input  $t$  scalare e  $\mathbf{y}$  vettore, costruisca il vettore  $\mathbf{f} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$  della stessa dimensione di  $\mathbf{y}$  (vettore colonna o riga a seconda di come è  $\mathbf{y}$ ).

**Prima possibilità:** funzione  $\mathbf{F}$  definita con function handle

```
t0=0; tf=0.1; y0=[0,0];  
R1=10; R2=10; e=5; L=0.1; C=1.e-3;  
fcirc=@(t,y)[(y(2)-y(1)/R2)/C;  
              (-y(2)*R1-y(1)+e)/L];  
Nh=...;  
  
[tn,un]=eulero_esp(fcirc,tspan,y0,Nh);
```

**Seconda possibilità:** funzione **F** costruita in un m-file con nome `fcirc.m`

```
function [f]=fcirc(t,y);  
R1=10; R2=10; e=5; L=0.1; C=1.e-3;  
f=zeros(size(y));  
f(1)=(y(2)-y(1)/R2)/C;  
f(2)=(-y(2)*R1-y(1)+e)/L;
```

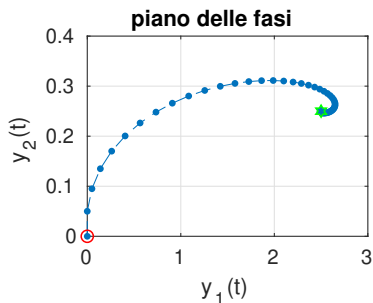
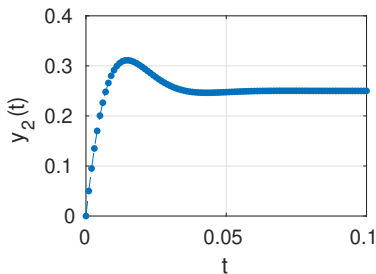
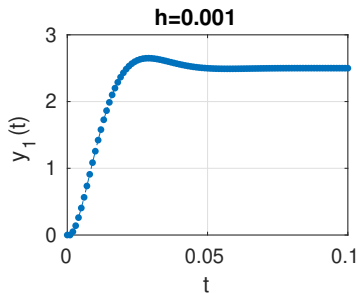
La chiamata ad `eulero_esp` è:

```
tspan=... ; y0=... ; Nh=... ;  
[tn,un]=eulero_esp(@fcirc,tspan,y0,Nh)
```

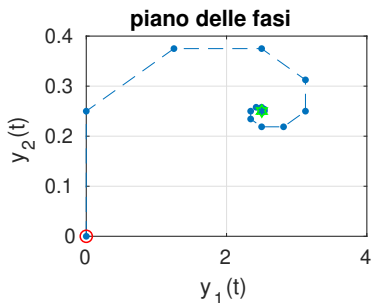
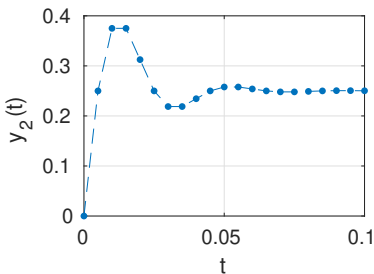
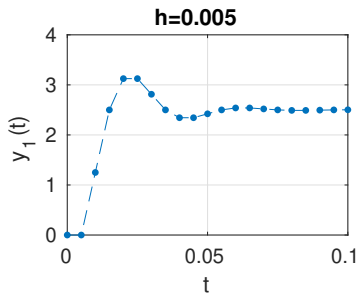
**Il primo argomento in input ad `eulero_esp` deve essere un function handle, quindi il nome della function deve essere preceduto da `@`**



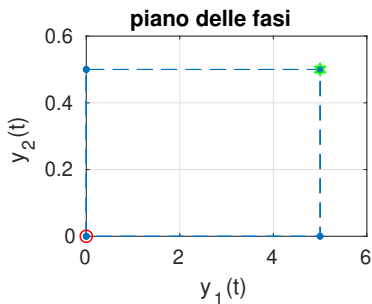
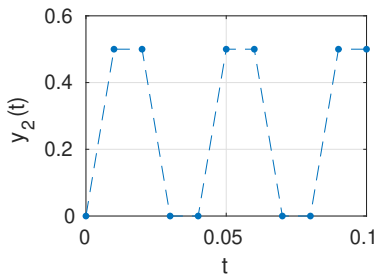
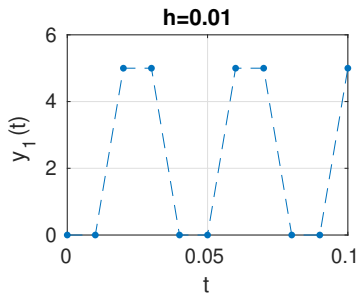
Risultato per  $L=0.1$ ;  $C=1.e-3$ ;  $R1=R2=10$ ;  $e=5$ ;  $h=0.001$



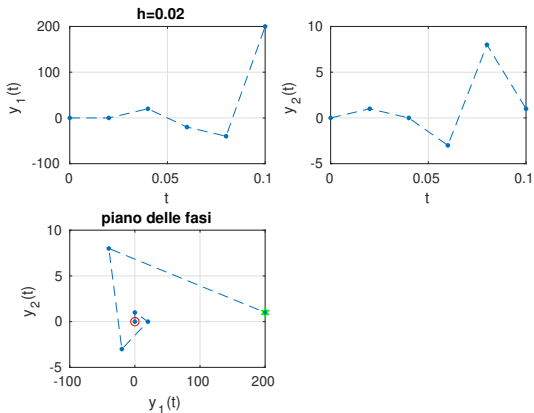
# Soluzione per $h = 0.005$



# Soluzione per $h = 0.01$



## Soluzione per $h = 0.02$



La soluzione numerica con  $h = 0.001$  è buona, quella con  $h = 0.005$  è poco accurata, quella con  $h = 0.01$  presenta delle oscillazioni non realistiche, quella con  $h = 0.02$  “esplode” (blow-up). Sono **oscillazioni numeriche**, dovute alla **manca di stabilità assoluta**.

## Stabilità assoluta per sistemi di eq

Poiché il sistema  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$  è lineare, si ha

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}.$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$  sono una matrice ed un vettore indipendenti dal tempo.

Il termine costante  $\mathbf{g}$  si può non considerare perchè non influisce sull'analisi della stabilità assoluta.

$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$  è la controparte vettoriale di  $y'(t) = \lambda y(t)$

Gli autovalori di  $A$  giocano il ruolo di  $\lambda$ .

**Un metodo risulta assolutamente stabile per un certo valore di  $h$  se  $h\lambda_i$  cade nella regione di assoluta stabilità del metodo per ogni autovalore  $\lambda_i$  della matrice  $A$ .**

Determinare la matrice  $A$ , calcolarne gli autovalori e determinare limitazioni su  $h$  affinché Eulero esplicito sia assolutamente stabile. I risultati numerici ottenuti concordano con quanto si è trovato per via teorica?

Se i dati sono:  $L=0.1$ ;  $C=1e-3$ ;  $R_1=R_2=10$ ;  $e=5$   
si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 1000 \\ -10 & -100 \end{bmatrix}.$$

Si ha  $\lambda_{1,2}(A) = -100 \pm 100i$ , quindi la condizione di assoluta stabilità per EE è

$$h < \frac{-2\text{Re}(\lambda_i(A))}{|\lambda_i(A)|^2} = 0.01$$

Effettivamente, i risultati numerici mostrano che per  $h < 0.01$  la soluzione numerica tende ad uno stato stazionario senza oscillazioni, mentre se  $h = 0.01$  si hanno oscillazioni di ampiezza costante nel tempo. Se si considera  $h > 0.01$  si ottengono oscillazioni di ampiezza crescente nel tempo.

# Risoluzione con Runge-Kutta 4

Lo schema RK4 è esplicito, ad un passo, convergente di ordine 4 rispetto a  $h$ , con regione di assoluta stabilità limitata:

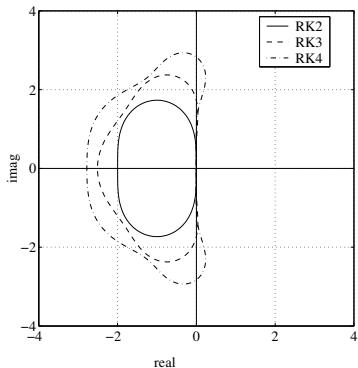
$$K_1 = f(t_n, u_n);$$

$$K_2 = f\left(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(t_{n+1}, u_n + hK_3\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$



Scaricare rk4 dalla pagina matlab del corso.

```
[tn,un]=rk4(odefun,tspan,y0,Nh)
```

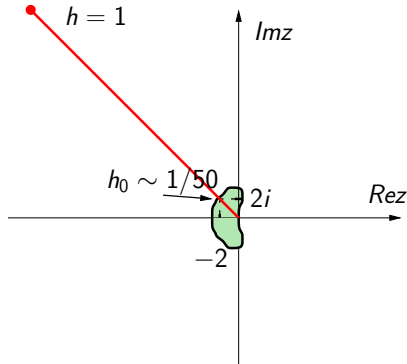


## Scelta di $h$ che garantisca assoluta stabilità a RK4

Riprendiamo la matrice  $A$  del sistema ed i suoi autovalori

$$\lambda_1 = -100 + 100i$$

$$h = 1$$

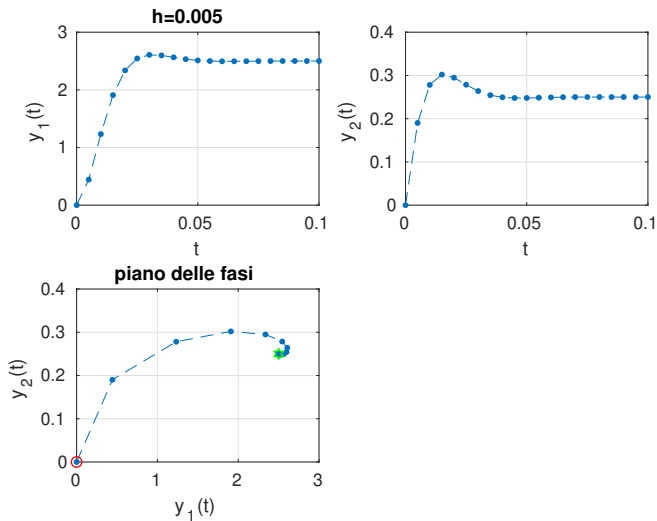


Se  $h < h_0 \sim 1/50$ , allora  $h\lambda_1 \in \mathcal{A}_{RK4}$  (cioè  $h\lambda_1$  cade nella regione di ass. stab.) ed il metodo risulta assolutamente stabile.

La limitazione con  $\lambda_2 = -100 - 100i$  è uguale perché la regione di assoluta stabilità è simmetrica.

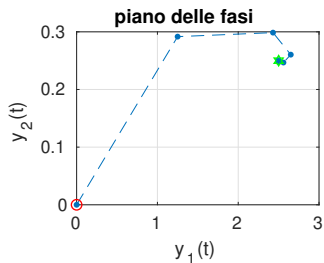
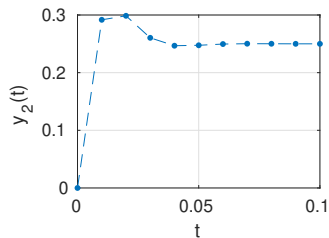
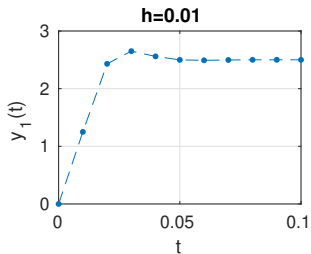
## RK4, $h = 0.005$

Risultato per  $L=0.1$ ;  $C=1.e-3$ ;  $R1=R2=10$ ;  $e=5$ ;



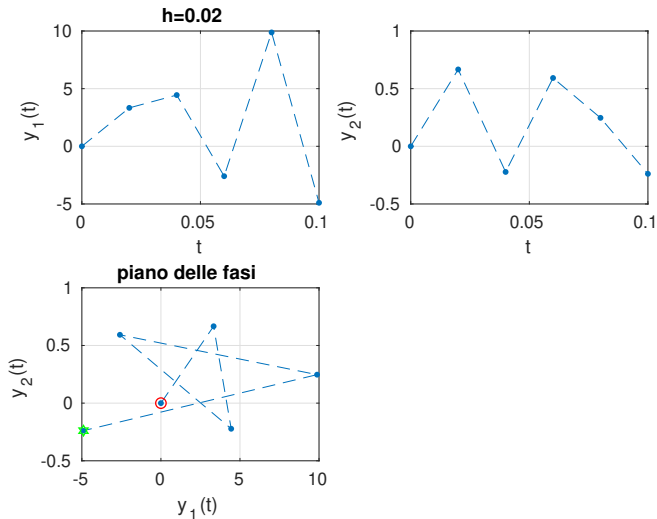
Lo schema è ass. stabile con questa scelta di  $h$

# RK4, $h = 0.01$



Lo schema è ass. stabile con questa scelta di  $h$

# RK4, $h = 0.02$



Lo schema NON è ass. stabile con questa scelta di  $h$

## Risoluzione con Eulero implicito

Si considerino gli stessi valori di  $h$  utilizzati con Eulero esplicito:  
 $h = 0.001$ ,  $h = 0.005$ ,  $h = 0.01$  e  $h = 0.02$ .

Al crescere di  $h$  la soluzione ottenuta con Eulero implicito è sempre meno accurata, ma non si generano oscillazioni.

Eulero implicito infatti è assolutamente stabile per ogni valore di  $h > 0$  e quindi la soluzione numerica del problema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  (con  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ) tenderà a zero per  $t_n \rightarrow \infty$ , anche con  $h$  grande.