Sistemi lineari sovradeterminati

2/11/26

il n° di eqz > n° di incognite

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3\times 2} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \underline{b} \in \mathbb{R}^3$$

Più in generale abbiamo $(\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times 1})$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $n > m$ $\quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^m$

? $\underline{x}$ sol di $A\underline{x} = \underline{b}$

$\exists$ una sol in senso classico se $\exists\, \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}$ è soddisfatta (non è sempre garantito).

Interpreto $A\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + x_m \underline{a}_m$ = combo lin dei vett colonna di A

dove $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, $\underline{a}_i$ sono i vettori colonna di A

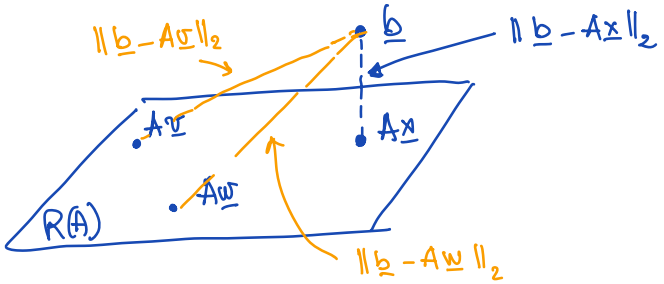
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A\underline{x} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ 4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tutti i prodotti del tipo $A\underline{x} \in \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m\} = R(A)$ range della matrice A

Chiedere che $\exists$ sol in senso classico di $A\underline{x} = \underline{b}$ equivale a chiedere che $\underline{b} \in \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m\}$

Nell'esempio dato $\underline{b} \in R(A)$, basta vedere $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

$\nexists$ sol in senso classico quando $\underline{b} \notin R(A)$



si cerca una sol $\underline{x}$ detta sol nel senso dei minimi quadrati

$$\exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\underline{b}-A\underline{x}\|_2 = \min_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \|\underline{b}-A\underline{v}\|_2 \qquad (1)$$

è equivalentemente

$$\exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\underline{b}-A\underline{x}\|_2^2 = \min_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} \|\underline{b}-A\underline{v}\|_2^2 \qquad (2)$$

Def $J(\underline{v}) = \|\underline{b}-A\underline{v}\|_2^2 = (\underline{b}-A\underline{v})^T(\underline{b}-A\underline{v})$

$$= \underline{b}^T\underline{b} - (A\underline{v})^T\underline{b} - \underline{b}^T(A\underline{v}) + (A\underline{v})^T(A\underline{v})$$

$$(\underline{v}^T\underline{w} = \underline{w}^T\underline{v})$$

$$= \underline{b}^T\underline{b} - 2\underline{v}^TA^T\underline{b} + \underline{v}^TA^TA\underline{v} \in \mathbb{R}$$

(2) è equivalente a cercare $\quad \exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \ J(\underline{x}) = \min_{\underline{v}\in\mathbb{R}^n} J(\underline{v}) \qquad (3)$

$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

devo calcolare $\min J(\underline{v})$

Se i vettori colonna di A sono lin indip $\Rightarrow$ A^TA è sim def pos.

Nel grad. e GC avevamo $\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^TA\underline{x} - \underline{x}^T\underline{b}$

avevo concavità verso l'alto perché

A era sdp, $\exists$! pto di min ass e contenuto nell'insieme pto staz

cioè t.c. $\nabla \Phi(\underline{x}) = \underline{0}$

Poiché A^TA è sdp $\Rightarrow$ $J(\underline{v})$ ha la concavità rivolta verso l'alto (è convessa) $\Rightarrow$ $\exists !$ pto di min ass e stazionario

la soluz $\underline{x}$ di (3) soddisfa l'eqz $\nabla J(\underline{x}) = \underline{0}$ -

Calcolando $\nabla J(\underline{x})$ si ha

$$\nabla J(\underline{x}) = -2A^T\underline{b} + 2A^TA\underline{x}$$

Chiedere $\nabla J(\underline{x}) = \underline{0} \iff -2A^Tb + 2A^TA\underline{x} = 0$

cioè

$$\boxed{A^TA\underline{x} = A^T\underline{b}} \qquad (4)$$

è un sist di eqz lin quadrato

la cui matrice A^TA è sdp -

(4) Sistema delle eqz normali -

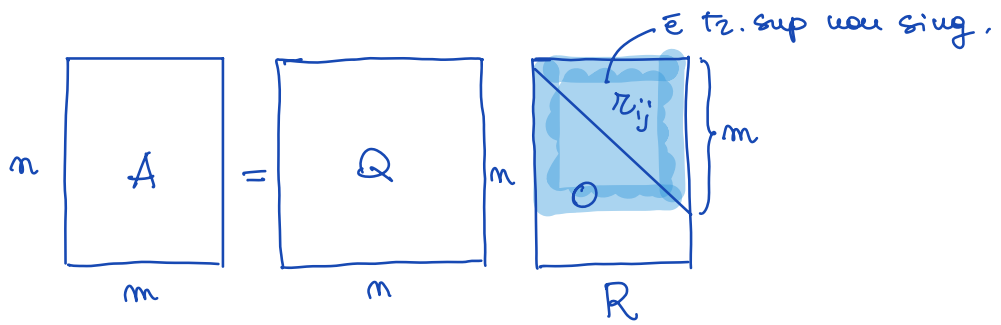
Risolvere (4) vuol dire trovare la sol $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ nel senso dei minimi quadrati -

Per risolvere (4) posso usare

1) Grad, GC
2) Fatt di Cholesky di A^TA
3) Fattorizzazione QR di A

Teorema Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, allora $\exists\, Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ortogonale $(Q^{-1} = Q^T)$ ed $\exists\, R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $r_{ii} \neq 0$ e $r_{ij} = 0$ quando $i > j$ t.c.

$$A = QR$$ -



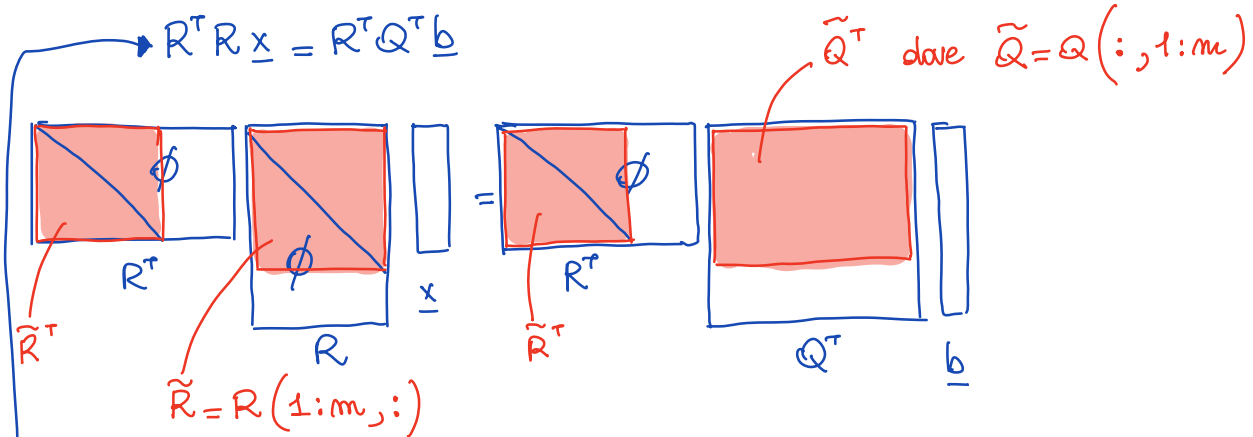
$A^TA\underline{x} = A^T\underline{b}$ diventa $(A = QR)$

$(QR)^T(QR)\underline{x} = (QR)^T\underline{b}$

$R^TQ^TQR\underline{x} = R^TQ^T\underline{b}$

$Q^TQ = I$

$R^TR\underline{x} = R^TQ^T\underline{b}$



$\tilde{R}^T\tilde{R}\underline{x} = \tilde{R}^T\tilde{Q}^T\underline{b}$

ma ora $\tilde{R}$ è quadrata e non sing $(r_{ii} \neq 0)$
e posso eliminare $\tilde{R}^T$ dal sistema, ottengo

$$\boxed{\tilde{R}x = \tilde{Q}^T\underline{b}} \qquad (5)$$

$(5) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow (1)$

cioè $\underline{x}$ sol di (5) è la sol di $A\underline{x} = \underline{b}$ nel senso dei minimi quadrati

Parto di $A\underline{x} = \underline{b}$ con A rettangolare

1) calcolo Q, R : $A = QR$ (*) $\quad [Q,R] = qr(A)$
2) estraggo $\tilde{R}$, $\tilde{Q}$ da R e Q
3) risolvo $\tilde{R}x = \tilde{Q}^T \underline{b}$ (sist triang sup)

(*) per calcolare Q e R si utilizzano processi ortogonalizzazione di Gram - Schmidt -

---

$\underline{x} = A \backslash \underline{b}$ e A è rettang.

matlab calcola la fatt QR di A e trova $\underline{x}$ come sol nel senso dei min quadrati