SISTEMI NON LINEARI

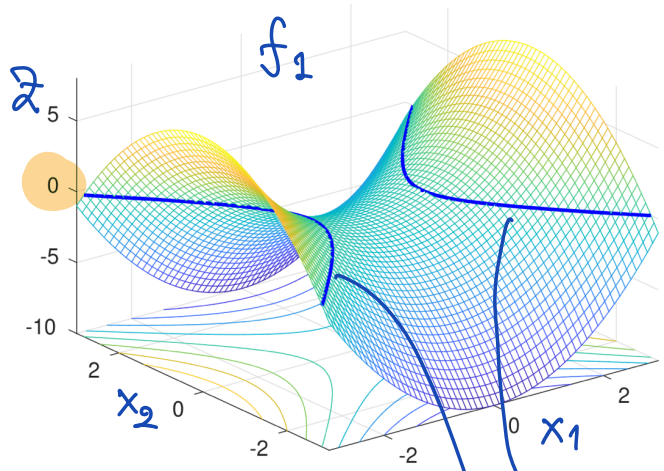
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{cases}$$

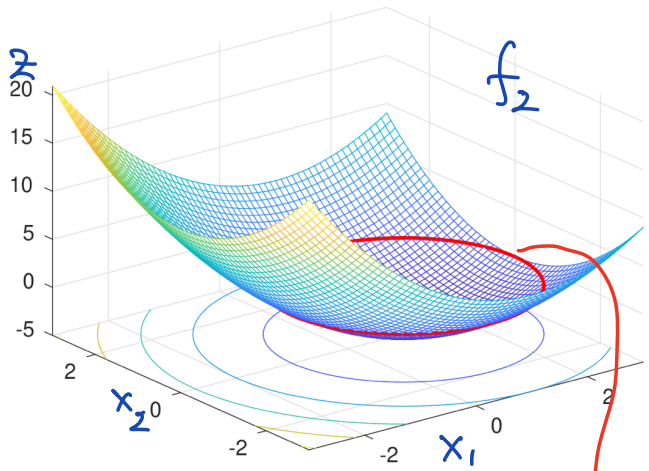
$$\begin{pmatrix} x \to x_1 \\ y \to x_2 \end{pmatrix}$$

$$z = f_1(x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$z = f_2(x_1, x_2)$$







$$z = f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$z = f_2(x_1, x_2) = 0$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \end{cases} \iff \boxed{\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}}$$

sist di eqz non lineari

Metodo di Newton per sistemi di eqz non lin

1D $f(x) = 0$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = b^{-1} \cdot a$$

2D $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \left(J_F(\underline{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \underline{F}(\underline{x}^{(k)}) \end{cases}$$

$$\underset{(2,1)}{\square} = \underset{(2,1)}{\square} - \underset{(2,2)}{\square} \cdot \underset{(2,1)}{\square}$$

$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1$

$f_1(x_1, x_2)$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$

$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 2$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$

costruisco la matrice $J_F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$

matrice Jacobiana di F

(nel nostro caso specifico $J_F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 - 2 & 2x_2 \end{bmatrix}$)

$\underline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$J_F(\underline{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \left(J_F(\underline{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \underline{F}(\underline{x}^{(k)}) \qquad k \geq 0 \end{cases}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} = -\left(J_F(\underline{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \underline{F}(\underline{x}^{(k)})$$

$\underline{y}$ = A = $\underline{b}$

chiamo con $\underline{y} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$

chiamo con $A = J_F(\underline{x}^{(k)})$

chiamo con $\underline{b} = -\underline{F}(\underline{x}^{(k)})$

$$A \cdot \underline{y} = A \cdot A^{-1} \cdot \underline{b} \iff A\,\underline{y} = \underline{b}$$

A: matrice $n \times n$

$\underline{y}$: vettore colonna di n comp.

$\underline{b}$: vettore colonna di n comp

sistema di eqz lineari di matrice A, termine noto $\underline{b}$ e vettore incognito $\underline{y}$

una volta trovato $\underline{y}$

trovo $\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \underline{y}$

Algoritmo di Newton per sistemi

Input : F, dF, $x\phi$, tol, kmax

F ← funzione handle di $\underline{F}$

dF ↑ funzione handle per la matrice Jacob.

$x\phi$ ↑ vettore iniziale (colonna)

Output : z, K, res

z ↑ il vettore soluz

K ↖ n° it. svolte

$res = \| \underline{F}(\underline{z}) \|_2$ ↑

(dato un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

norma euclidea) | norma euclidea

$k = 0$; $err = tol + 1$

while $k < kmax$ & $err \geq tol$

$A = dF(x\phi)$ ($A = J_F(\underline{x}^{(k)})$)

$b = -F(x\phi)$ ($\underline{b} = \underline{F}(\underline{x}^{(k)})$)

risolvo il sistema $Ay = b$ ← più corretto: $y = A \backslash b$ (backslash)

$xnew = x\phi + y$

$err = \|xnew - x\phi\|_2 = \|y\|_2$ ← norm(y)

$k = k + 1$

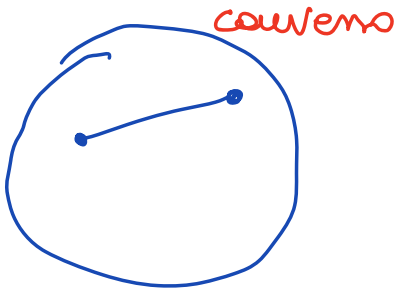
$x\phi = xnew$

end

$z = x\phi$

$res = \|F(z)\|_2$

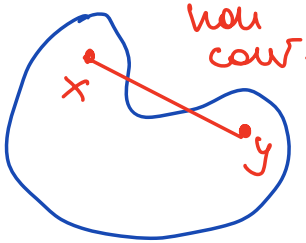
Teorema (di Newton per sistemi)



Sia B un aperto convesso in $\mathbb{R}^n$,

(∀ $x, y \in B$, il segmento che congiunge x e y è tutto interno a B)

Sia $\underline{F} \in C^1(B)$ ed $\exists\, \underline{\alpha} \in B : \underline{F}(\underline{\alpha}) = \underline{0}$



se $\exists\, B_r(\underline{\alpha})$: $\forall\, \underline{x} \in B_r(\underline{\alpha})$, $J_F(\underline{x})$ è invertibile, allora $\forall\, \underline{x}^{(0)} \in B_r(\underline{\alpha})$ sufficientemente vicino ad $\underline{\alpha}$, la succ. $\{\underline{x}^{(k)}\}$ costruita col metodo di Newton converge ad $\underline{\alpha}$.

Se poi $\underline{F}$ ha tutte le derivate seconde parziali continue e $\underline{\alpha}$ è semplice $\Rightarrow$ la conv è di ordine 2, se invece $\underline{\alpha}$ è multiplo $\Rightarrow$ la conv è di ordine 1.

In $\mathbb{R}^n$ il metodo di secanti ha tante estensioni possibili, una di queste è il metodo di Broyden

non usa J_F, ma approx J_F con una matrice opportuna aggiornata ad ogni k –

Broyden ha ordine di conv $1 < p < 2$