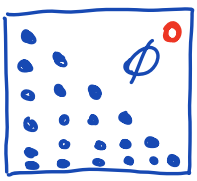
12/10/26

Metodi diretti per sistemi lineari quadrati

1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A)\neq 0$ e A triangolare inferiore



cioè se $a_{ij}=0$ quando $j>i$

metodo delle sostituzioni in avanti

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = b_1/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

$$x_n = \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j}{a_{nn}}$$

```
for i = 1 : n
    x_i = (b_i - sum_{j=1}^{i-1} a_ij x_j) / a_ii
```

$1+1+(i-1)+i-2 = 2i-1 =$ n° operazioni alla riga i

se A è tr. inf $\Rightarrow \det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$

se $\det(A)\neq 0 \Rightarrow a_{ii}\neq 0 \quad \forall i=1,\dots,n$

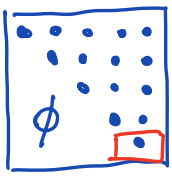
$$\text{n° tot op} = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i - n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n^2$$

costo del metodo di sost in avanti è n^2 op. elem.

2) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$ è triangolare superiore



se $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ddots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$x_n = b_n / a_{nn}$ poi ciclo su $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

metodo di sostituzioni all'indietro

for $i = n : -1 : 1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

costo $= n^2$ opz.

se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1; n$

3) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$ generica

obbiettivo è trasformare A in triangolare sup o in un prodotto di matrici triangolari

Metodo di eliminazione di Gauss (MEG)

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

trasformare $A\underline{x} = \underline{b}$ in un sist. tr. sup $U\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$

(mat. tr. sup.)

si sfrutta un principio di equivalenza dei sist lineari: se sostituisco un'eq del sistema con una combinazione lineare della stessa eq con un'altra eq del sistema, ottengo un sistema equivalente a quello dato

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 1R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(1) $k=1$

$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

(2)

$U \qquad \tilde{b}$

```
for k = 1 : n-1        (passo, = indice della colonna da azzerare)
    for i = k+1 : n    (indice di riga)        eventuale pivotazione per righe
        m_ik = a_ik / a_kk        (moltiplicatori)
        for j = 1 : n              (indice di colonna)
            a_ij = a_ij - m_ik a_kj   ← (comb. lineare di riga i con riga k)
```

$b_i = b_i - m_{ik} b_k$

└ Algoritmo del MEG

costo: $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ op.

costo del MEG $= \Theta(n^3)$ ↑ o grande

Teorema se $\det A \neq 0$ e tutti i minori principali di A sono NON nulli, allora MEG arriva a termine senza divisioni per 0

Def: minore principale di ordine k di A è il determinante della sottomatrice di A ottenuta prendendo le prime k righe e le prime k colonne di A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Esempio con $\det A \neq 0$, ma in cui MEG si ferma

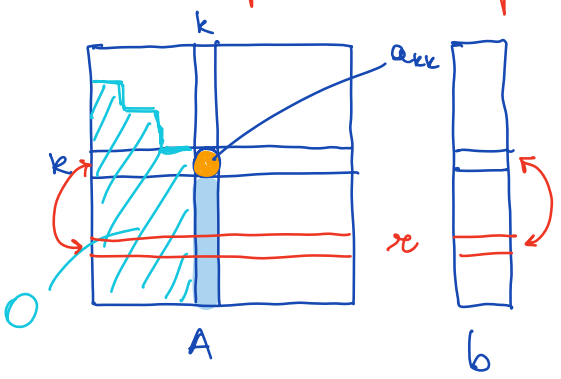
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) \neq 0$$

$$\begin{matrix} \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{2}R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow a_{22} = 0$$

2° principio di equiv dei sistemi: scambiando 2 o + righe fra di loro si ottiene un sistema equivalente a quello dato

$R_2 \leftrightarrow R_3$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sist. tr. sup.

HEG con pivotazione per righe



passo k

(*) [cerco riga r con $k \le r \le m$: $|a_{rk}| = \max_{k \le i \le m} |a_{ik}|$

scambio riga r con riga k sia in A che in b]

$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ se a_{kk} (dopo la pivotaz.) è t.c. $|a_{kk}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}|$

$\Rightarrow |m_{ik}| < 1$

poiché m_{ik} moltiplica elementi a_{kj} modificati in precedenza e quindi affetti da arrotondamento, il fatto che $|m_{ik}| < 1$ comporta che gli errori di arrot. rimangano limitati.

Teorema Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ HEG con pivotazione arriva a terminazione (cioè riesco a costruire la matr. tr. sup. U finale senza divisioni per 0)

1) REG $A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow U\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$
2) sost all'indietro x risolvere $U\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$

$\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$
n^2

con tot $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

Fattorizzazione LU

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$? L = triang inferiore
U = triang superiore

t.c. $\boxed{A = L \cdot U}$

$\exists \infty$ coppie di L e U : $A = L \cdot U$

scegliamo la coppia con la proprietà che $L_{ii} = 1$ per $i = 1, \dots n$

Se so calcolare L e U allora

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff LU\underline{x} = \underline{b} \iff \begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} & \text{risolvere un sist } tr. \text{ inferiore} \\ U\underline{x} = \underline{y} & \text{risolvere un sist } tr. \text{ superiore} \end{cases}$$

$$(\log x)^2 + (\log x) + 3 = 0 \qquad t = \log x \text{ sostituzione}$$
$$t^2 + t + 3 = 0$$

come calcolare L e U ?

19/10/26

Teorema Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$ t.c. tutti i minori principali sono non nulli, allora posso definire

U = matrice triang superiore ottenuta alla fine del MEG

e $L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ m_{ik} & & 1 \end{bmatrix}$ dove m_{ik} sono i moltiplicatori del MEG

t.c. $L \cdot U = A$.

Algoritmo MEG

```
for k = 1 : n-1
    for i = k+1 : n
        m_ik = a_ik / a_kk
        for j = k+1 : n
            a_ij = a_ij - m_ik * a_kj
        b_i = b_i - m_ik * b_k
```

$U = \text{triu}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$

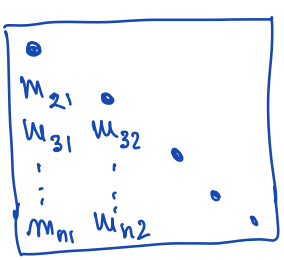
$x = \text{backsub}(U, b)$
(risolvo $Ux = b$)

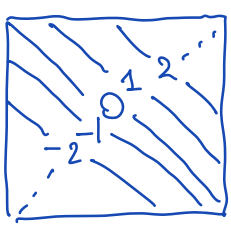
Algoritmo di fatt LU

```
for k = 1 : n-1
    for i = k+1 : n
        a_ik = a_ik / a_kk
        for j = k+1 : n
            a_ij = a_ij - a_ik * a_kj
        (non modifico b)
```

$U = \text{triu}(A)$

$L = \text{tril}(A, -1) + \text{eye}(n)$
(estrai gli elementi dalla diagonale -1 in giù)





trovate L e U, risolvo in sequenza $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

costo MEG

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

$$+ \quad n^2 \qquad (Ux = b)$$

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

costo LU

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

$$+ n^2 \qquad (Ly = b)$$

$$+ n^2 \qquad (Ux = y)$$

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

Perché e quando è vantaggioso usare LU invece del MEG?

Devo risolvere 20 più sistemi

$?\underline{x}: \; A\underline{x} = \underline{b}$, $?\underline{w}: A\underline{w} = \underline{c}$

se lavoro con MEG: $\left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n\right) \cdot 2 \sim \frac{4}{3}n^3$

(MEG modifica contemp A e t.noto)

lavorando con LU:

- 1 sola fattorizzazione (è indip. dal t.noto)

$$L, U: \; LU = A \qquad \sim \frac{2}{3}n^3$$

- risolvo per il 1° sist $\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$ $(2n^2)$

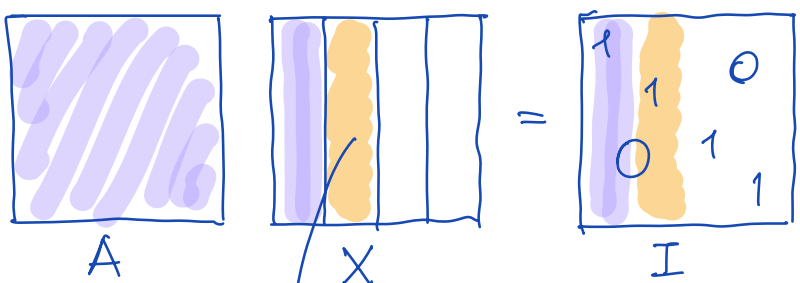
- risolvo per il 2° sist $\begin{cases} Ly = c \\ Uw = y \end{cases}$ $(2n^2)$

costo totale è $\frac{2}{3}n^3 + 4n^2$

Esempio: data A invertibile, ? A^{-1}

X incognita

A^{-1}: $A^{-1}A = A(A^{-1}) = I$



$\underline{x}_j$ $\quad X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n]$

per calcolare $\underline{x}_j$ devo risolvere $A\underline{x}_j = \underline{e}_j$ (j-sima)

($\underline{e}_j$ vettore j-simo della base canonica)

1 - calcolo LU: $LU = A$ $\left(\sim \frac{2}{3}n^3\right)$

for $j = 1:n$
  calcolo $\underline{x}_j$ risolvendo 2 sistemi triangolari
  $\begin{cases} Ly = \underline{e}_j & (2n^2) \\ U\underline{x}_j = y \end{cases}$
end

costo totale $\sim \frac{2}{3}n^3 + n \cdot 2n^2 = \frac{8}{3}n^3$ costo per calcolare A^{-1}

Se devo calcolare $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ $\Leftrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$

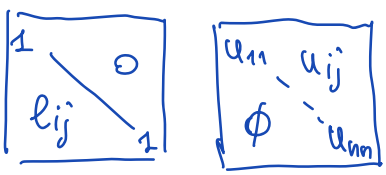
$\frac{8}{3}n^3$ $\frac{2}{3}n^3$

? $\det(A)$

so che se $A = B \cdot C \Rightarrow \det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$

se calcolo L, U : $L \cdot U = A$

$\Rightarrow \det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$



costo $\sim \frac{2}{3}n^3$

Per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolari, si può fare LU con pivotazione per righe -

Si costruisce una matrice P (matrice di permutazione) (cioè una matrice identità a cui sono state scambiate le righe) -

- $P = I$

for $k = 1 : n-1$

```
% pivotazione: cerco r:  |a_rk| = max_{k≤i≤m} |a_ik|
scambio A_r ↔ A_k
scambio P_r ↔ P_k
for i = k+1 : n
    a_ik = a_ik / a_kk
    for j = k+1 : n
        a_ij = a_ij - a_ik · a_kj
```

```
U = triu(A)
L = tril(A) + eye(n)
```

Si ha che $\boxed{L \cdot U = \underline{P} \cdot A}$

Se devo risolvere $A\underline{x} = \underline{b}$ ho: (se $\underline{P}$ è una matrice di permutazione $\Rightarrow$ $\underline{P}$ è non sing)

$$\underbrace{\underline{P}A}_{=} \underline{x} = \underline{P}\underline{b}$$

$$L \cdot \underbrace{U\,\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{P}\,\underline{b}$$

risolvo $\begin{cases} L\underline{y} = \underline{P} \cdot \underline{b} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$ (faccio le permutazioni su $\underline{b}$)

Matrici simmetriche e definite positive (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è sdp se

1) $A = A^T$
2) $\underline{x}^T A \underline{x} > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \ \underline{x} \neq \underline{0}$

Criterio se A è simm e $\lambda_i(A) > 0 \Rightarrow A$ è sdp

Criterio di Sylvester se A è simm e tutti i minori principali sono strettamente positivi $\Rightarrow A$ è sdp

---

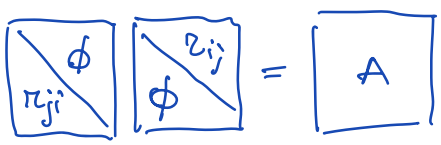
Data A sdp $\quad ? \ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}$

posso usare MEG o LU, ma posso utilizzare la FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKY (costa meno di MEG e LU)

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sdp,

costruisco $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triang sup t.c.

$$R^T R = A \qquad \text{costo} \sim \frac{1}{3} n^3$$

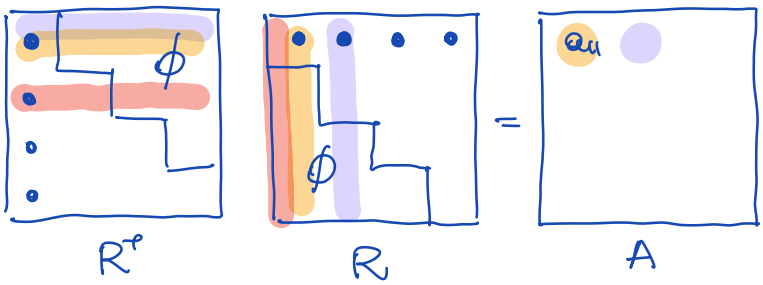


trovata R, devo risolvere 2 sist triang.

$$R^T R = A, \quad A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underbrace{R^T R \, \underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} R^T \underline{y} = \underline{b} \\ R\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

Idea di come è strutturato l'algoritmo

A è data, ? R



$r_{11} \cdot r_{11} = a_{11} \rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$r_{11} \cdot r_{12} = a_{12} \rightarrow r_{12} = a_{12} / r_{11}$

⋮

trovo la prima riga di R

sfruttando gli elementi nulli e quelli che ho già calcolato, trovo via via tutti gli elementi di R

fine metodi diretti