29/10/24

Sistemi lineari sovradeterminati

(n° eqz > n° incognite)

$$(1)\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

$? \ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}$

Non è detto che (1) abbia sol in senso classico

Interpreto il significato di $A\underline{x}$

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_2}$$

$A\underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2$ è una comb. lineare dei vettori colonna di A

genericamente $A\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{a}_j$

• Se $\underline{b}$ è comb lineare dei vettori colonna di A $\Rightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$

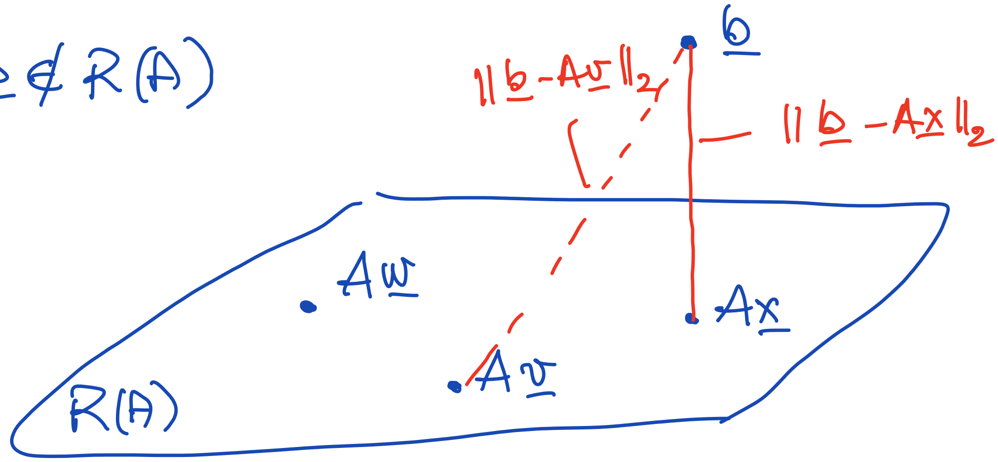
esiste $\underline{x}$ soluz classica del sistema.

$R(A) = \text{range}(A) = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$

↑ ins. immagine dell'appl lineare associata ad A.

Se $\underline{b} \in R(A) \Rightarrow$ ho sol in senso classico.

Se $\underline{b} \notin R(A)$



(2) cerco $\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

↑ è detta soluzione nel senso dei minimi quadrati

(3) è equiv a $? \, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2^2 \leq \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

(3) è equiv a

$$? \, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \; \|\underline{b} - A\underline{x}\|_2^2 = \min_{\underline{v} \in \mathbb{R}^n} \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2$$

Chiamo con $\Phi(\underline{v}) = \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2$

trovare $\underline{x}$ sol nel senso dei min quad vuol dire trovare il punto di minimo di Φ.

$$\Phi(\underline{v}) = \|\underline{b} - A\underline{v}\|_2^2 = (\underline{b} - A\underline{v})^T(\underline{b} - A\underline{v}) =$$

$$= \underline{b}^T\underline{b} - (A\underline{v})^T\underline{b} - \underline{b}^T A\underline{v} + (A\underline{v})^T A\underline{v} =$$

$\left(\underline{u}^T\underline{v} = \underline{v}^T\underline{u} \quad \text{p. scalare è simmetrico}\right)$

$$= \underline{b}^T\underline{b} - 2(A\underline{v})^T\underline{b} + \underline{v}^T A^T A\underline{v} = \Phi(\underline{v})$$

Se i vett colonna di A sono lin indip

$\Rightarrow A^T A$ è sdp

$\Rightarrow \Phi$ è un paraboloide convesso

e il suo punto di minimo è l'unica sol dell'eqz $\nabla\Phi(\underline{v}) = \underline{0}$

$$\nabla \underline{\Phi}(\underline{v}) = -2A^T\underline{b} + 2A^TA\underline{v} = 0$$

$$\boxed{A^TA\,\underline{x} = A^T\underline{b}}$$

$\underline{x}$ è la sol del pb. di min

Sistema delle eqz normali

A^TA è sdp

è s. lineare che posso risolvere

con Cholesky, Grad coniugato e grad.

N.B. $k(A^TA)$ potrebbe essere molto alto

$\Rightarrow$ si sceglie un metodo alternativo

che controlla meglio il condiz.

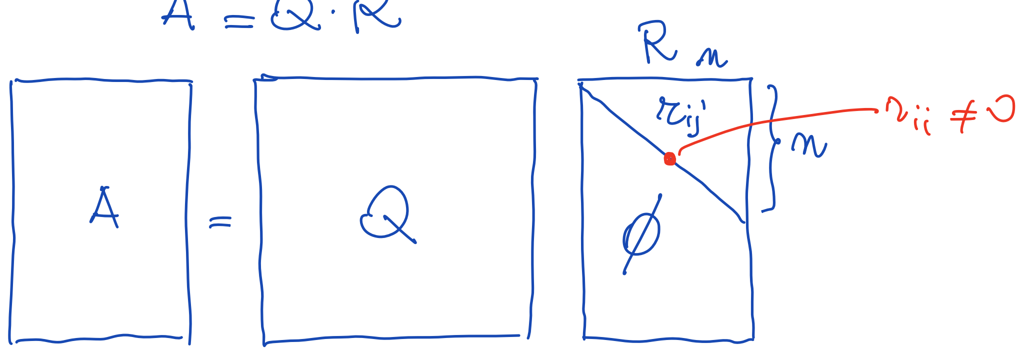
Fattorizzazione QR

5/11/24

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonale $(Q^{-1} = Q^T)$

ed $\exists!\, R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $r_{ii} \neq 0$ e $r_{ij} = 0$ se $i > j$

t.c. $\quad A = Q \cdot R$

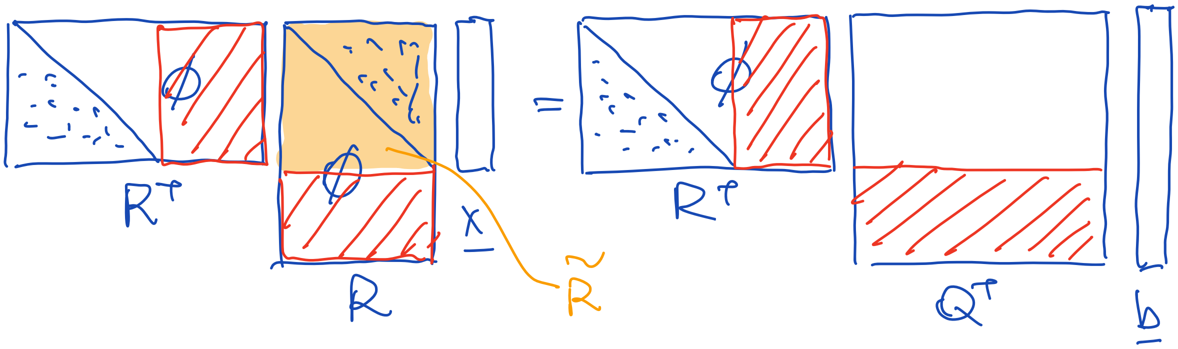


Ripartiamo da $A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$

applico la fatt QR: $R^T \underbrace{Q^T \cdot Q}_{I} R \, \underline{x} = R^T Q^T \underline{b}$

$A = QR \Rightarrow A^T = R^T Q^T$

riscrivo $R^T R \underline{x} = R^T Q^T \underline{b}$



$\tilde{R} = R(1:n, :)$ elimino la parte che non dà contributo

$(\tilde{R}^T)^{-1}$ $\quad$ $(\tilde{R}^T)^{-1}$

$$\tilde{R}^T \tilde{R} \underline{x} = \tilde{R}^T \tilde{Q}^T \underline{b}$$

$\tilde{Q} = Q(:, 1:n)$

Osservo che $\tilde{R}$ è non sing perché $r_{ii} \neq 0$

quindi posso eliminarla dal sistema

$\tilde{R} \underline{x} = \tilde{Q}^T \underline{b}$ è sist triang sup.

Algoritmo :

1 - Calcolo la fatt QR di A

2 - estraggo $\tilde{R}$ e $\tilde{Q}$ da R e Q

3 - risolvo $\tilde{R}\,\underline{x} = \tilde{Q}^T \underline{b}$ (*)

$[\tilde{Q}, \tilde{R}] = qr(A, \text{"econ"})$

se A rettang

$x = A \setminus \underline{b}$ richiama fatt QR e risolve il sistema (*)