METODI DIRETTI per SL

15/10/24

Dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$? $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: $A\underline{x} = \underline{b}$

Chiedo che $\det A \neq 0$ (per garantire $\exists !$ sol)

1) A diagonale

$a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0 \ \forall i$

($a_{ii} = \lambda_i(A)$ autovalori)

tutte eqz indipendenti

$\Rightarrow \quad x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ per $i = 1, \dots, n$

costo = n divisioni (n op. elem) $(+, -, /, *)$

---

2) A triangolare inferiore

$a_{ij} = 0$ se $j > i$

$\det A \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0$

anche qui $a_{ii} = \lambda_i(A)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & & \emptyset & \\ & & \ddots & & \\ & a_{ij} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \\ \vdots \quad \rightarrow \text{riga } i \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

$$x_i = \Big(b_i \underset{1}{-} \underbrace{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1})}_{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}\Big) \overset{1}{/} a_{ii}$$

$i-1$ prodotti e $i-2$ somme

$\vdots$

$x_n = \dots$

metodo delle sostituzioni in avanti

$$\text{for } i = 1:n$$
$$\quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$\forall i$ ho $i-1 + i-2 + 1+1$ oper $= 2i-1$ oper.

$$\text{costo totale} = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n} \overset{(*)}{=}$$

somma di Gauss $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\overset{(*)}{=} \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n^2$$

$\Rightarrow$ sost in avanti per risolvere s. tr. inf richiede n^2 ops.

3) A triangolare superiore

$a_{ij} = 0$ se $i > j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ \emptyset & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0 \quad (a_{ii} = \lambda_i(A))$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$x_n = b_n / a_{nn}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = n : -1 : 1 \\ \quad x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \end{array}\right.$$

Metodo di sostituzione all'indietro

costo: n^2 operaz. elementari.

4) A generica quadrata non singolare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\det A \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

METODO di ELIMINAZIONE di GAUSS (MEG)

$A^{(1)} = A$
$\underline{b}^{(1)} = \underline{b}$

sono tutti sistemi equivalenti
cioè hanno tutti la stessa soluzione

$$\underbrace{A^{(1)}\underline{x} = \underline{b}^{(1)} \longrightarrow A^{(2)}\underline{x} = \underline{b}^{(2)} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A^{(n)}\underline{x} = \underline{b}^{(n)}}$$

fase riduzione
(si trasforma il sist originario in triangolare superiore)

è tr. superiore

poi applico il metodo di sost all'indietro al sistema $A^{(n)}\underline{x} = \underline{b}^{(n)}$

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \underline{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dati

costruisco $A^{(2)}$ e $\underline{b}^{(2)}$: $A^{(2)}\underline{x} = \underline{b}^{(2)}$ sia equiv. a $A^{(1)}\underline{x} = \underline{b}^{(1)}$ e gli elem di $A^{(2)}$ in prima colonna sotto diag principale siano nulli.

Sostituendo un'eq del sist con una comb. lineare tra l'eq stessa e un'altra eq del sistema, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

lascio inalterata riga$_1$

riga$_2$ $\longleftarrow$ riga$_2$ $-$ riga 1

riga$_3$ $\longleftarrow$ riga$_3$ $- 2$ riga 1

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

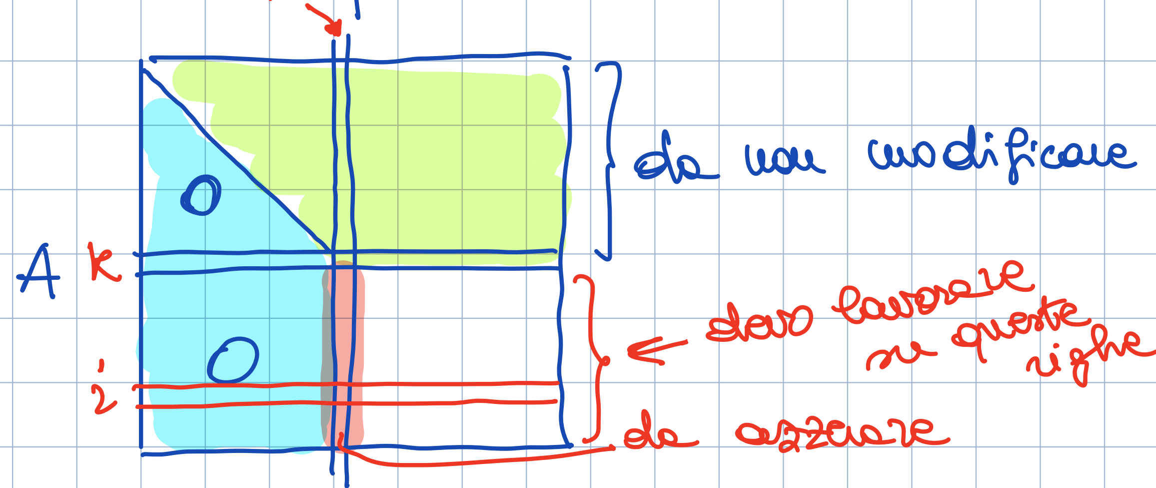
$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

: $A^{(3)}\underline{x} = \underline{b}^{(3)}$ sia equiv ad $A^{(2)}\underline{x} = \underline{b}^{(2)}$

moltiplicatore

riga$_3$ $\leftarrow$ riga$_3$ $+2$ riga$_2$

caso + generale k passo k : $A^{(k)} \to A^{(k+1)}$



Al passo k azzero gli elem della colonna k sotto la diag principale

MEG (fase di riduzione)

for $k = 1 : n-1$

for $i = k+1 : n$ (ciclo sulle righe da modificare)

pivotazione

$m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ moltiplicatore per la riga i-sima

for $j = 1 : n$ $\quad k+1 : n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

comb. lineare delle righe i e k

MEG costo (riduzione) $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ oper.

per risparmiare operazioni

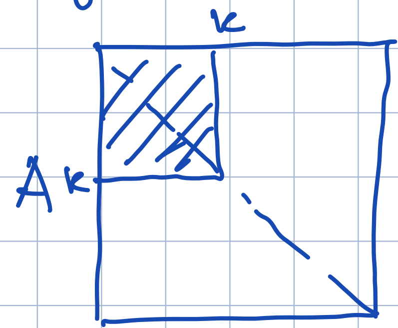
Tanto poi, quando risolvo con sost all'indietro, il triangolo inferiore della matrice non è mai referenziato

riduzione + sost all'indietro:

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n + n^2 = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

MEG ha costo $= O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$

Def: Minore principale di ordine k di una matrice quadrata è il determinante della matrice ottenuta prendendo le prime k righe e k colonne della matrice



Teorema (MEG):

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare e tutti i minori principali di A siano non nulli. Allora MEG arriva a terminazione (cioè non ci sono divisioni per 0).

ES in cui MEG non arriva a terminazione

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \underline{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$

minore di ordine 2 nullo

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \qquad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2} R_1$

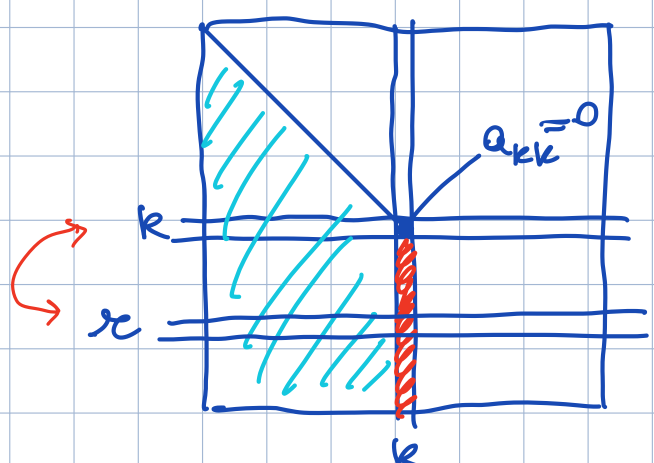
$A^{(3)} = \ ?$ $\qquad m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{2}{0} \ ?$

MEG si blocca

Riga $_2$ $\leftrightarrow$ Riga $_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pivotazione per righe :



perché voglio m_{ik} più piccolo possibile

$$: \ |a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

trovato r, scambio riga r con riga k

per limitare gli errori di arrotondamento

La pivotazione si fa sempre, anche se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$x = A \backslash b$$

MEG (riduzione con pivotazione per righe) + sostituzione all'indietro

Teorema (MEG con pivotazione)

Se A è non sing, quadrata $\Rightarrow$ MEG + pivotazione per righe arriva a terminazione.

22/10/24

Domanda:

Devo Risolvere $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A\underline{z} = \underline{c}$

MEG è ancora efficiente o posso fare di meglio?

Conto le op: $\left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n\right) + \left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n\right)$

$$= \frac{4}{3}n^3 + \dots$$

Riscrivo il MEG

MEG

for $k = 1:n-1$

(pivotazione) — cerco r t.c. $|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$, scambio la riga r con la riga k (sia su A che su b)

for $i = k+1:n$

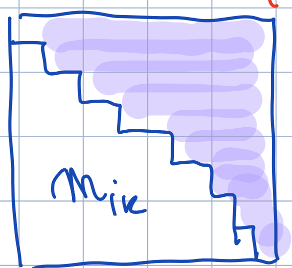
$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

for $j = k+1:n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k)}$$

$$\boxed{b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}\, b_k^{(k)}}$$

estrarre (ritardare queste opz)



Fattorizzazione LU di A

for $k = 1:n-1$

(pivotazione) (*)

for $i = k+1:n$

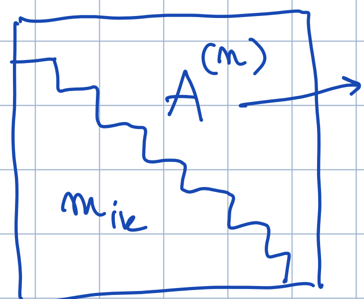
$$a_{ik}^{(k+1)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

for $j = k+1:n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k+1)} \cdot a_{ij}^{(k)}$$

U = triang sup di A inclusa la diagonale princ.

L = triang inf di A esclusa la diag principale, sulla diagonale principale metto 1



$$L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ m_{ik} & & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

L servirà per ricostruire le opz sul t. noto b che ho trascurato prima, U serve per risolvere il sist t. sup come dopo il MEG

Si dimostra che

$$A = L \cdot U$$

L, U sono fattori di A, questa operazione è detta FATTORIZZAZIONE LU di A

L (tr. inf) U (tr. sup)

Calcolate L e U :

$$A\underline{x}=\underline{b} \underset{A=LU}{\iff} L\cdot \underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}}=\underline{b} \iff \begin{cases} L\underline{y}=\underline{b} & \text{sist t. inferiore} \\ U\underline{x}=\underline{y} & \text{sist t. sup.} \end{cases}$$

MEG

riduzione :

$(A,b) \longrightarrow [A^{(n)}, \underline{b}^{(n)}]$

sost all'indietro

$A^{(n)}\underline{x}=\underline{b}^{(n)}$

$A^{(n)}=U$

LU

fattorizz

$A \longrightarrow [L, U]$

sost avanti

$L\underline{y}=\underline{b}$ ← realizzo le opz del MEG nel t. noto che ho trascurato nella fatt.

sost indietro

$U\underline{x}=\underline{y}$

Costo LU : $\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{7}{6}n$

$Ly=b$ $\quad n^2$

$Ux=y$ $\quad n^2$

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n$$

Se devo risolvere un solo sistema MEG o LU costano uguale,

ma se ho 2 sistemi $A\underline{x}=\underline{b}$ e $A\underline{z}=\underline{c}$ con la stessa matrice

1 sola fattorizz LU $\quad \frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{7}{6}n$

risolvere $L\underline{y}=\underline{b}$ $\qquad 2n^2$

$U\underline{x}=\underline{y}$

risolvere $L\underline{y}=\underline{c}$ $\qquad 2n^2$

$U\underline{z}=\underline{y}$

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{7}{2}n^2-\frac{7}{6}n$$

(*) pivotazione per la fatt LU

cerco r : $|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k\le i\le n} |a_{ik}^{(k)}|$

scambio la riga r di A con la riga k di A
memorizzo qs scambio in una matrice
P di permutazione :

(inizializzo (prima del ciclo in k) $P=I$)

cioè scambio la riga r di P con la riga k di P

Si ha che $\qquad P\cdot A = L\cdot U$

la fatt con pivotazione : $\underset{\text{input}}{A} \longrightarrow \underset{\text{output}}{L, U, P}$

Se ho $A\underline{x}=\underline{b} \iff \underbrace{PA}_{LU}\,\underline{x} = P\underline{b} \iff L\underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}}=P\underline{b}$

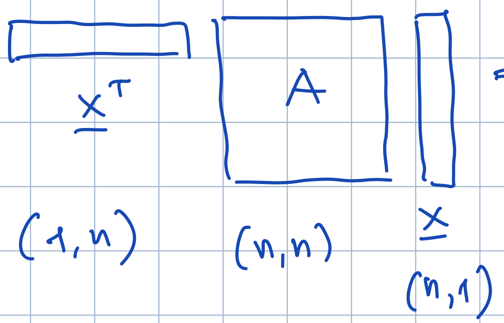
$$\iff \begin{cases} L\underline{y}=P\underline{b} \leftarrow \text{la permutazione agisce sul t. noto} \\ U\underline{x}=\underline{y} \end{cases}$$

Matrici simmetriche definite positive

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A è sim. def pos (sdp) se:

1) A è sim, cioè $A^T = A$

2) $\underbrace{\underline{x}^T A \underline{x}}$ $> 0 \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{x} \neq \underline{0}$

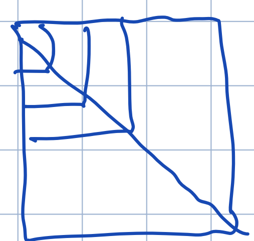


= scalare

<u>Criteri</u>: 1) se A è sim, A è sdp $\iff \lambda_i(A) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\uparrow$ autovalori di A

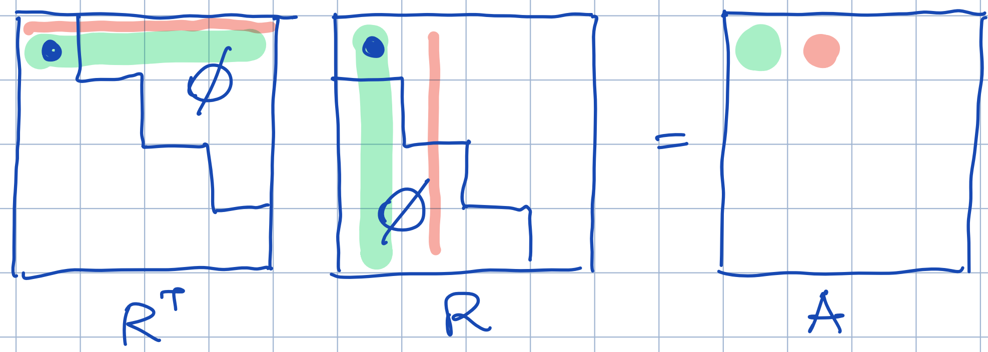
2) Criterio di Silvester:
Sia A sim, A è sdp se tutti i minori principali di A sono valori positivi



Fattorizzazione di Choleski

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp, la fatt di Chol. costruisce una matrice triangolare sup R:

$$A = R^T \cdot R$$



- 1° riga di $R^T \cdot 1^\circ$ colonna di R $= a_{11}$ $\qquad r_{11}^2 = a_{11}$

$$\rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

- 1° riga di $R^T \cdot 2^\circ$ colonna di R $= a_{12}$ $\qquad r_{11} \cdot \underset{\uparrow}{r_{12}} = a_{12}$

$\vdots$

trovo tutta la 1° riga di R

e via dicendo si trovano tutti gli elem di R.

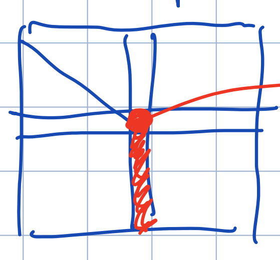
Costo $\sim \frac{1}{3} n^3 + \dots$ (circa la metà della LU)

Una volta calcolata R:

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff R^T \underbrace{R\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \iff \begin{cases} R^T \underline{y} = \underline{b} & \text{s.t. inf} \\ R\underline{x} = \underline{y} & \text{s.t. sup.} \end{cases}$$

<u>OSS</u>: Con Cholesky non si fa pivotazione

se $A \in$ sdp $\qquad \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$ si trova sempre in posizione $i = k$



elemento diagonale

Metodo multifrontale (cenno)

è una variante del MEG per matrici sparse cioè con molti elementi nulli.

L'eliminazione (o riduzione) è svolta in un ordine che riflette la struttura della matrice stessa.

Comando \ di MATLAB

se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadrata)

- se A è triang sup $\Rightarrow$ applica sost all'indietro
- se A è " inf $\Rightarrow$ " sost avanti
- se A è sdp $\Rightarrow$ " Cholesky
- se A è generica e sparsa $\Rightarrow$ multifrontale
- se A è generica $\Rightarrow$ LU con pivotazione (o MEG con pivot)

- se A è rettangolare $\Rightarrow$ fattorizzazione QR (rimandiamo di qualche lezione l'argomento)