Numero di condizionamento di matrice

26/10/26

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare,

numero di condizionamento di $A = K(A) \in \mathbb{R}$, $K(A) \geq 1$

- basato su le def di raggio spettrale, norma di matrice

norma di matrice

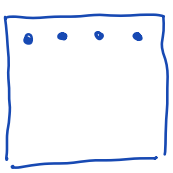
sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

t.c: 1) $\|A\| \geq 0 \ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (positività)

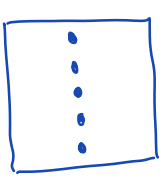
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (omogeneità) dis tri ang.

Es $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$



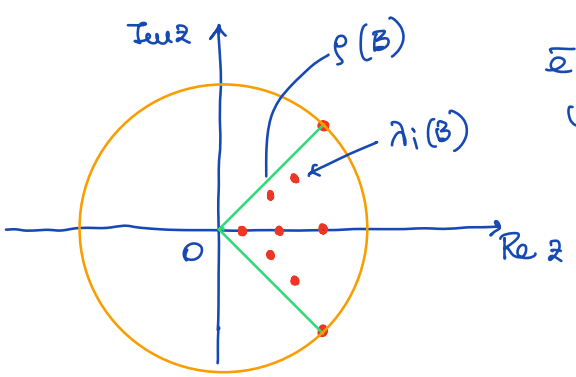
$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$



$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ (rho) dove $\rho(B) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(B)|$ (autovalori di B)

$\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

è RAGGIO SPETTRALE della matrice B



Def Sia $\|\cdot\|$ una norma di matrice, il numero di condiz di A rispetto a questa norma è

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ non sing}$$

Tornando ai metodi grad e GC

Teorema (gradiente): Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Allora $\forall\, \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, il metodo del gradiente converge alla sol. $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ e

$$\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|_A \leq \left(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\right)^{k} \cdot \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|_A \qquad \forall\, k \geq 1$$

(k: iterazione; $K(A)$: n° di condiz)

dove $\|\underline{v}\|_A = \sqrt{\underline{v}^T A \underline{v}}$ (è una norma matriciale).

Oss $\quad \rho = \dfrac{K(A)-1}{K(A)+1} \Rightarrow 0 \leq \rho < 1$

minore è ρ e + veloce è la convergenza del metodo

ρ è piccolo se $K(A)$ più vicino a 1 che non a 100 o 1000

se $K(A) \nearrow \Rightarrow \rho \to 1$ e la velocità del grad. diminuisce

Meglio lavorare con matrici con $K(A)$ basso

Matrici con $K(A) \gg 1$ sono dette MATRICI MAL CONDIZIONATE

Teorema (GC) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.
Allora $\forall\, \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ il metodo del GC converge alla sol $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ al più in n iterazioni, in assenza di errori di arrotondamento.
Inoltre, $\forall\, k \geq 1$ si ha

$$\| \underline{x} - \underline{x}^{(k)} \|_A \leq \frac{2 \cdot c^k}{1 + c^{2k}} \| \underline{x} - \underline{x}^{(0)} \|_A$$

dove $c = \dfrac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1}$.

OSS Sperimentalmente si ha che, fissata ε, il $\#it \sim \sqrt{K(A)}$

Stime a priori nel risolvere sistemi lineari (∀ metodo risolutivo diretto o iterativo)

Obiettivo ? $\underline{x}$: $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad$ $\underline{x}$ = soluzione esatta

In realtà si lavora con $\hat{A} = A + \delta A$ (perturbazione) $\quad$ $\hat{\underline{b}} = \underline{b} + \delta \underline{b}$ (↑ perturb.)

quindi troviamo $\hat{\underline{x}}$ sol di $\hat{A}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}}$
($\hat{\underline{x}}$ ↑ sol perturbata)

? $\dfrac{\| \underline{x} - \hat{\underline{x}} \|}{\| \underline{x} \|}$ = err relativo senza conoscere la sol esatta $\underline{x}$ e senza conoscere la sol calcolata $\hat{\underline{x}}$

Teorema Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non sing, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

e sia la perturbazione δA : $\|\delta A\|_2 < \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$

Allora

$$\frac{\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \leq K(A) \cdot \left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} + \frac{\|\delta \underline{b}\|_2}{\|\underline{b}\|_2} \right)$$

$K(A)$: condizionamento di A

OSS $K(A)$ è un fattore di amplificazione dell'errore sui dati

es $\cdot \left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} + \frac{\|\delta \underline{b}\|_2}{\|\underline{b}\|_2} \right) \sim 10^{-16}$ $\Rightarrow$ $\frac{\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \leq 10^{-11}$

$K(A) \sim 10^5$

evitare matrici con $K(A)$ elevato = matrici mal condizionate