METODI ITERATIVI per SL

22/10/24

dato $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dato $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$? $\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}$

Dato $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, un metodo iterativo costruisce una succ di vettori $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k\geq 0}$ con l'obiettivo che

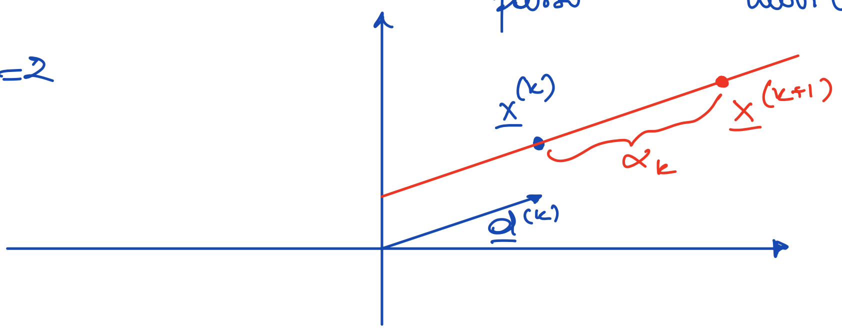
$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}$$

$\underline{x}^{(k+1)}$ è costruito aggiornando $\underline{x}^{(k)}$ così:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}$$

$\alpha_k \in \mathbb{R}$ passo; $\underline{d}^{(k)}$ direzione di movimento

$n=2$



Metodo del gradiente

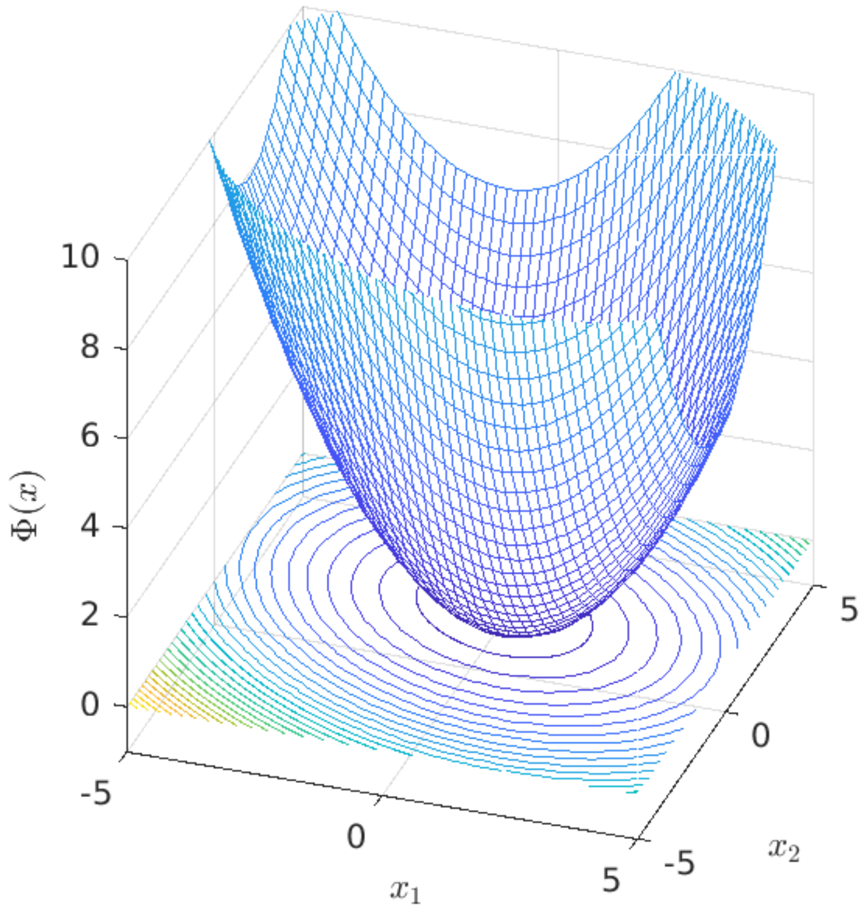
Sia A sdp, costruiamo $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita

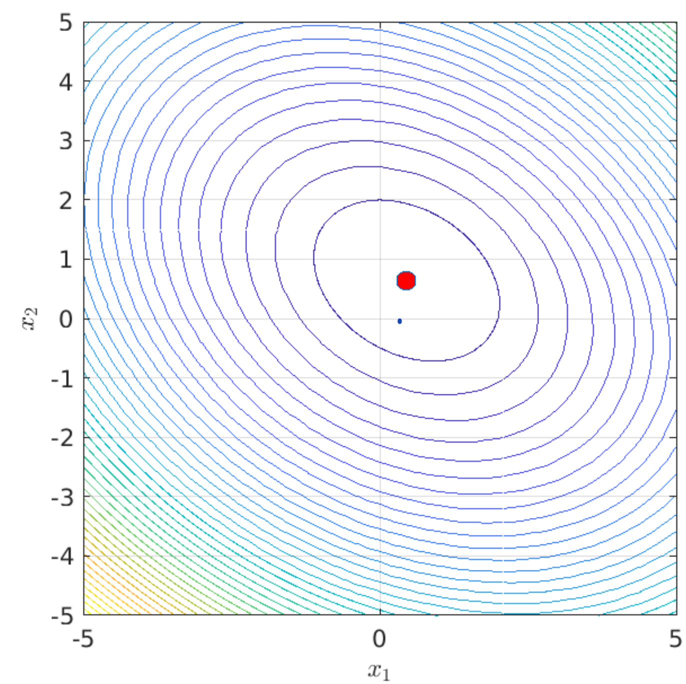
→ $\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T A \underline{x} - \underline{x}^T \underline{b}$, è paraboloide

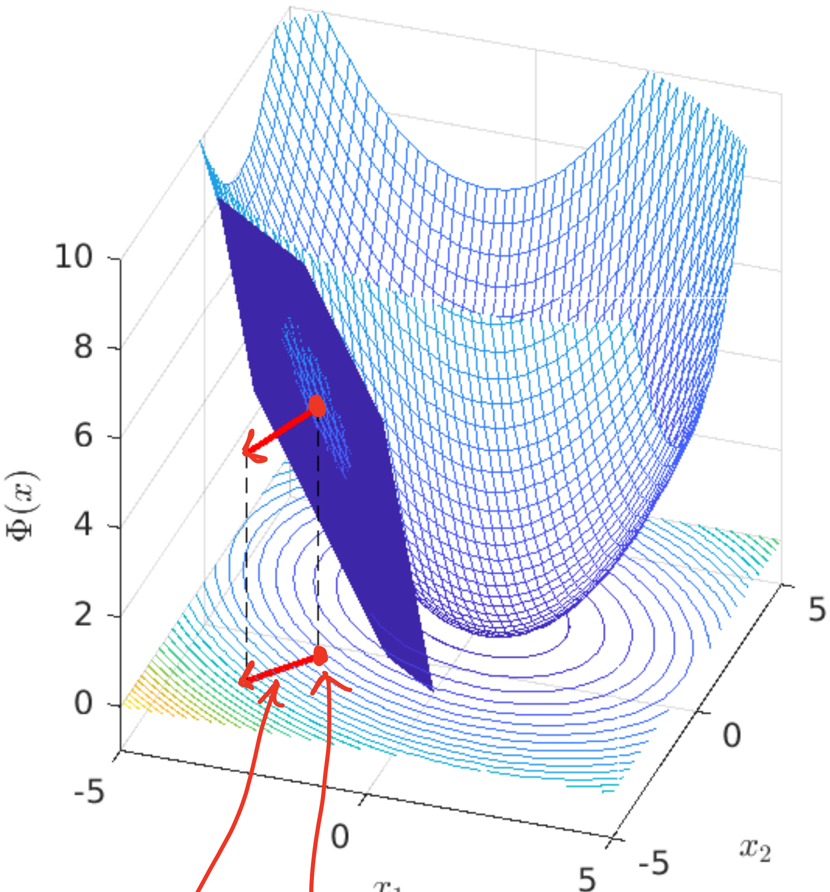
Si dimostra che il pto $\underline{x}^*$ di minimo assoluto del paraboloide è la soluzione del sistema

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad \left(\nabla\Phi(\underline{x}) = A\underline{x} - \underline{b} = \underline{0} \right)$

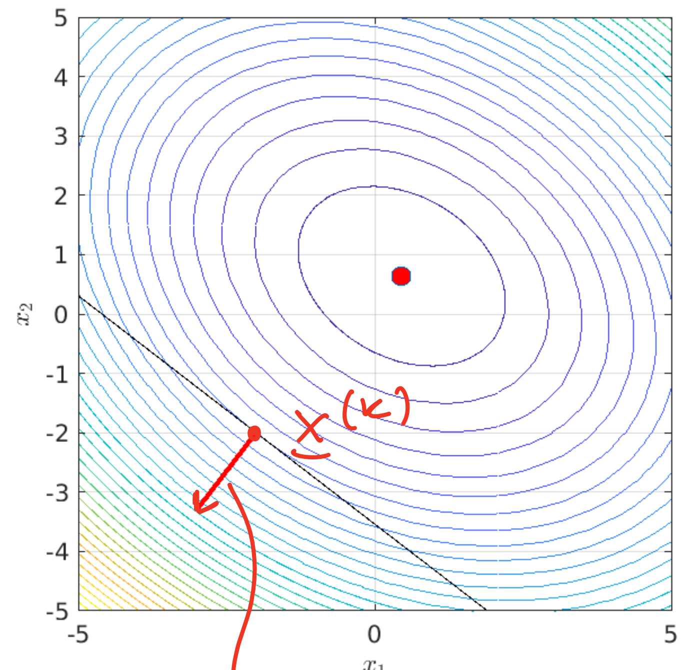
$$\nabla \Phi(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{bmatrix} = \underline{0}$$





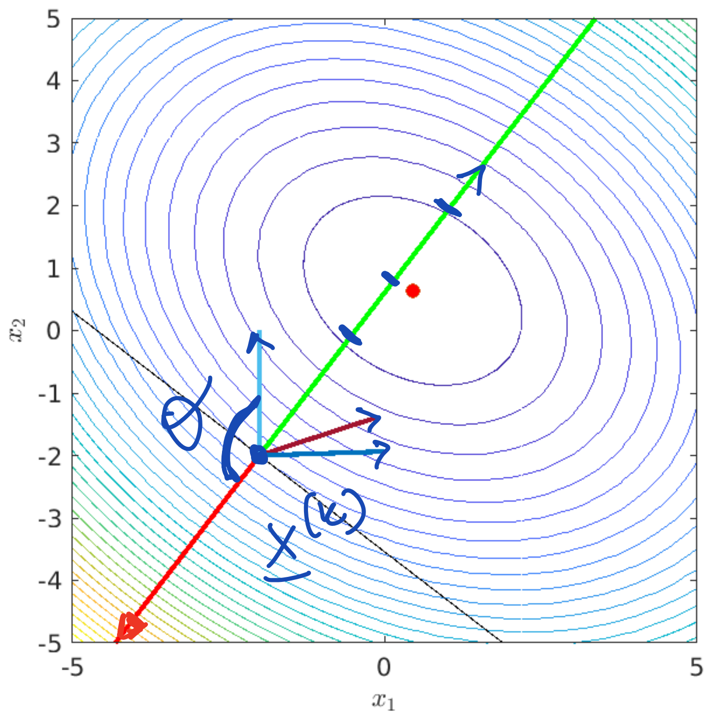


$\nabla \underline{\Phi}(\underline{x}^{(k)})$ $\underline{x}^{(k)}$



$\nabla \underline{\Phi}(\underline{x}^{(k)})$ punta verso il max

Def: $\underline{d}^{(k)}$ è una <u>direzione di discesa</u> al passo k per Φ se:



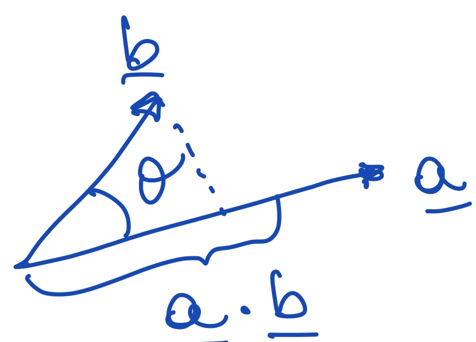
1) $\left(\underline{d}^{(k)}\right)^T \nabla\Phi\left(\underline{x}^{(k)}\right) < 0$ se $\nabla\Phi\left(\underline{x}^{(k)}\right) \neq \underline{0}$

2) $\underline{d}^{(k)} = \underline{0}$ se $\nabla\Phi\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \underline{0}$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}$$

$$\underline{a}^T \underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{b} = |a|\,|b|\cdot\cos\theta$$

$\underline{a}^T\underline{b} > 0 \iff \cos\theta > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



$\underline{a}^T\underline{b} < 0 \iff \cos\theta < 0 \quad \theta$ è ottuso

Il metodo del gradiente sceglie

$$\underline{d}^{(k)} = -\nabla \underline{\Phi}(\underline{x}^{(k)})$$ la direzione di discesa è l'opposto del gradiente di $\underline{\Phi}(\underline{x}^{(k)})$

$$\underline{d}^{(k)} = -(A\underline{x}^{(k)} - \underline{b})$$

$$= \underline{b} - A\underline{x}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$$ vettore residuo

Il residuo è nullo se $\underline{x}^{(k)} \equiv \underline{x}$, cioè ho $A\underline{x} = \underline{b}$

cioè $\underline{r} = \underline{b} - A\underline{x} = \underline{0}$

Come scegliere α_k (passo)

definisco $\varphi(\alpha) = \underline{\Phi}(\underbrace{\underline{x}^{(k)} + \alpha\,\underline{d}^{(k)}}_{\underline{x}^{(k+1)}}) =$

conosco $\underline{x}^{(k)}$ e $\underline{d}^{(k)}$, ? α

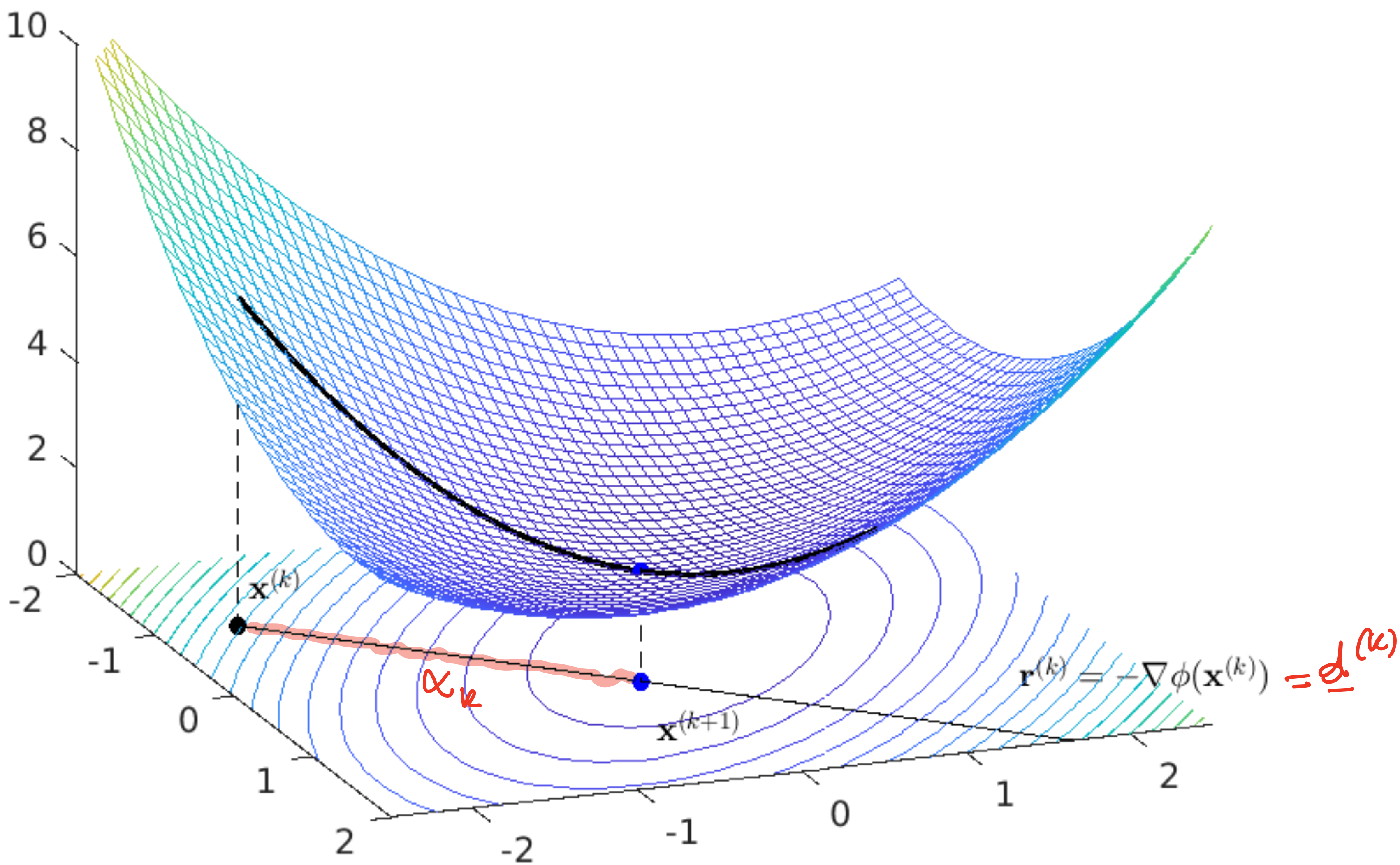
$$= \frac{1}{2}\left(\underline{x}^{(k)} + \alpha\,\underline{d}^{(k)}\right)^T A \left(\underline{x}^{(k)} + \alpha\,\underline{d}^{(k)}\right) - \left(\underline{x}^{(k)} + \alpha\,\underline{d}^{(k)}\right)^T \underline{b}$$

$$= (\quad)_a\,\alpha^2 + (\quad)_b\,\alpha + (\quad)_c$$

$$\varphi(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$ (curva vera sul paraboloide)

$$\varphi'(\alpha) = 0 \quad \to \quad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

direzione di discesa del gradiente e sezione di Phi



$$\alpha_k = \frac{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k)}}{(\underline{d}^{(k)})^T A \, \underline{d}^{(k)}}$$

$\underline{d}^{(k)}$ = direz di discesa

$\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(k)}$ residuo

nel gradiente $\underline{d}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$

Algoritmo del metodo del gradiente:

Input A, $\underline{b}$, $\underline{x}^{(0)}$

$\underline{r}^{(0)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(0)}$, $\underline{d}^{(0)} = \underline{r}^{(0)}$ $\left(= -\nabla \Phi(\underline{x}^{(0)}) \right)$

per $k \geq 0$ fino a convergenza

$$\alpha_k = \frac{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k)}}{(\underline{d}^{(k)})^T A \, \underline{d}^{(k)}}$$

salvo $\underline{v} = A\underline{d}^{(k)}$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}$$

uso $\underline{v}$

$$\underline{r}^{(k+1)} = \boxed{\cancel{\underline{b} - A\underline{x}^{(k+1)}}} = \underline{r}^{(k)} - \alpha_k A \underline{d}^{(k)}$$

$$\underline{d}^{(k+1)} = \underline{r}^{(k+1)}$$

29/10/24

$$\underline{r}^{(k+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di} \\ \text{residuo}}}{=} \underline{b} - A\underline{x}^{(k+1)} = \underline{b} - A\left(\underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}\right) =$$

$$= \underbrace{\underline{b} - A\underline{x}^{(k)}}_{\underline{r}^{(k)}} - \alpha_k A \underline{d}^{(k)}$$

test d'arresto : sul residuo

ci si ferma quando $\dfrac{\| \underline{r}^{(k)} \|}{\| \underline{b} \|} < \varepsilon$ (ε = tolleranza data in input)

$\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A \underline{x}^{(k)}$, $\underline{r} = \underline{0} \iff A\underline{x} - \underline{b} = 0$

$A\underline{x} = \underline{b}$

Algoritmo Grad (2ª versione)

Input: $A, \underline{b}, \underline{x}_0, \varepsilon, kmax$ — ε ← tol

Output: $\underline{x}$ sol calcolata, k, res, resvec

res: $\dfrac{\| \underline{r}^{(k)} \|}{\| \underline{b} \|}$ all'ultima iter.

resvec: vettore dei residui normalizzati

$\underline{r}^{(0)} = \underline{b} - A \underline{x}^{(0)}$; $\underline{d}^{(0)} = \underline{r}^{(0)}$

$k = 0$, $err = \varepsilon + 1$; resvec = [ ];

while $err > \varepsilon$ & $k \leq kmax$

$\underline{v} = A \underline{d}^{(k)}$ $\sim n^2$

$\alpha_k = \dfrac{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k)}}{(\underline{d}^{(k)})^T \cdot \underline{v}}$

$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}$

$\underline{r}^{(k+1)} = \underline{r}^{(k)} - \alpha_k \underline{v}$

$\underline{d}^{(k+1)} = \underline{r}^{(k+1)}$

$err = \| \underline{r}^{(k+1)} \| / \| \underline{b} \|$; resvec = [resvec ; err]

$k = k+1$

$\forall$ iterazione il costo maggiore è il prodotto $\underline{v} = A \underline{d}^{(k)}$

$\sim n^2$ ops

$x = x^{(k)}$, res = err

1 – Quanto è buono il test d'arresto

<u>Stima a priori</u>

$A\underline{x} = \underline{b}$ sistema esatto

$\hat{A}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}}$ sistema perturbato

se $K(A)$ = n° di condizionamento di A

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\|}{\|\underline{x}\|}}_{\text{errore nella soluz}} \le \underbrace{K(A)}_{\text{fattore di amplificazione degli errori sui dati}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\|A - \hat{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|\underline{b} - \hat{\underline{b}}\|}{\|\underline{b}\|} \right)}_{\text{errore sui dati}}$$

$$\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(k)} \iff \underline{A\underline{x}^{(k)} = \underline{b} - \underline{r}^{(k)}}$$

$\hat{A} = A$ $\quad \hat{\underline{b}} = \underline{b} - \underline{r}^{(k)}$

$\hat{\underline{x}} = \underline{x}^{(k)}$

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|}{\|\underline{x}\|} \le K(A) \left(0 + \frac{\|\cancel{\underline{b}} - \cancel{\underline{b}} + \underline{r}^{(k)}\|}{\|\underline{b}\|} \right)$$

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|}{\|\underline{x}\|} \le K(A) \cdot \frac{\|\underline{r}^{(k)}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$\uparrow$

errore $\qquad\qquad$ stimatore dell'err

se $\kappa(A)$ è piccolo $\left(\geq 1, \quad 1 \leq \kappa(A) \lesssim 100\right)$

$\Rightarrow$ stimatore piccolo $\Rightarrow$ errore piccolo

se $\kappa(A) \gg 1 \Rightarrow$ posso avere stimatore piccolo un errore molto grande.

N.B. Attenzione a problemi con $\kappa(A)$ elevato. (soluzione: precondizionatore)

2 _ Convergenza

Teorema: Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp, $\forall\, \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, il metodo del gradiente converge alla sol del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, inoltre si ha

$$\| \underline{x} - \underline{x}^{(k)} \|_A \leq \left(\frac{\kappa(A) - 1}{\kappa(A) + 1} \right)^k \| \underline{x} - \underline{x}^{(0)} \|_A$$

dove $\| \underline{v} \|_A = \sqrt{\underline{v}^T A \underline{v}}$.

Quanto veloce converge la succ alla

soluzione dipende da $K(A)$ -

Sia $\rho = \dfrac{K(A)-1}{K(A)+1}$

$0 \le \rho < 1$

se $\rho \sim 1 \Rightarrow \rho^k \sim 1$

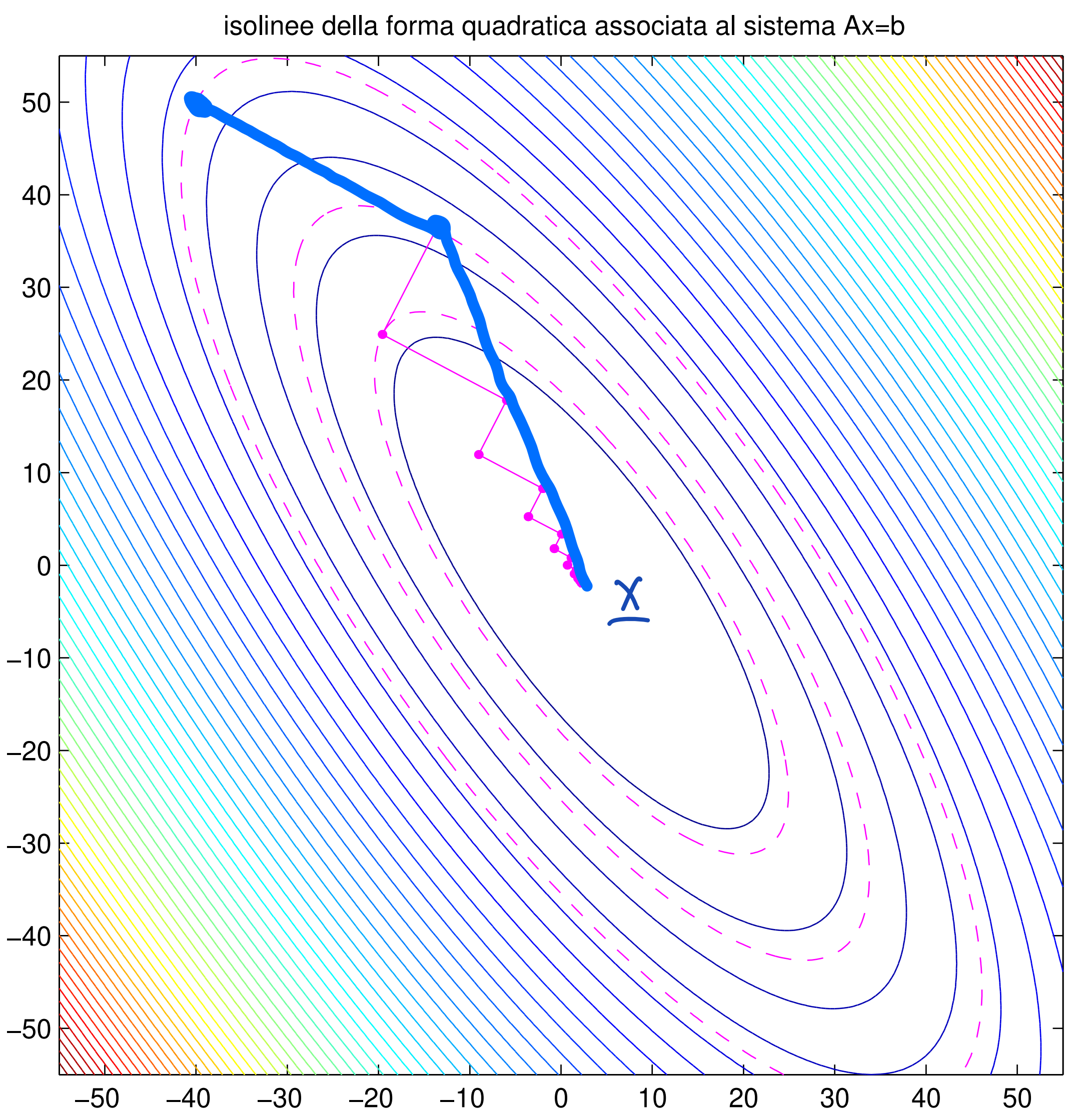
e $\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|_A \sim \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|$

convergenza molto lenta

Se $\rho \ll 1 \Rightarrow \rho^k \ll \rho \ll 1$

l'errore si riduce maggiormente

= convergenza + veloce



$n = 2$

$\underline{d}^{(k+1)} \perp \underline{d}^{(k)}$

ma non è garantito che $\underline{d}^{(k+1)} \perp \underline{d}^{(j)}$ con $j < k$

$\Downarrow$

il metodo del gradiente soffre di lentezza cronica

— metodo del gradiente

— metodo del gradiente coniugato

Metodo del gradiente coniugato

A sdp, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

costruisco ancora $\begin{cases} x^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)} & k \geq 0 \\ x^{(0)} \text{ dato} \end{cases}$

α_k come nel metodo del gradiente, mentre:

$\underline{d}^{(0)} = \underline{r}^{(0)}$

$\underline{d}^{(k+1)} = \underline{r}^{(k+1)} - \beta_k \underline{d}^{(k)}$ con $\beta_k = \dfrac{(A\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k+1)}}{(A\underline{d}^{(k)})^T \underline{d}^{(k)}}$

Queste direzioni di discesa sono t.c.

1) $(\underline{d}^{(k+1)})^T A \underline{d}^{(j)} = 0 \qquad \forall j \leq k$

2) $(\underline{r}^{(k+1)})^T \underline{d}^{(j)} = 0 \qquad \forall j \leq k$

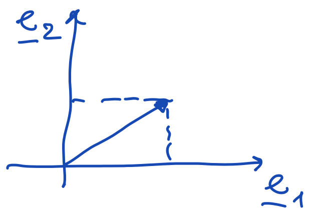
Poiché A è sdp $\Rightarrow$ A è non sing $\Rightarrow$ che la 1) sta dicendo che le direzioni di discesa sono linearm. indipendenti

$\{ \underline{d}^{(0)}, \underline{d}^{(1)}, \dots, \underline{d}^{(k)} \}$ sono vett di $\mathbb{R}^n$ lin indip,

e $\{ \underline{d}^{(0)}, \underline{d}^{(1)}, \dots, \underline{d}^{(n-1)} \}$ è una base di $\mathbb{R}^n$

A questo punto la 2) dice che $\underline{r}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a tutti i vettori $\underline{d}^{(0)}, \underline{d}^{(1)}, \dots, \underline{d}^{(n-1)}$, cioè è ortogonale alla base di $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\underline{r}^{(n)} = \underline{0}$

$\underline{0} = \underline{r}^{(n)} = \underline{b} - A\,\underline{x}^{(n)}$ cioè



$$\underline{x}^{(n)} = \underline{x}$$

è la sol del GC al passo n

sol esatta

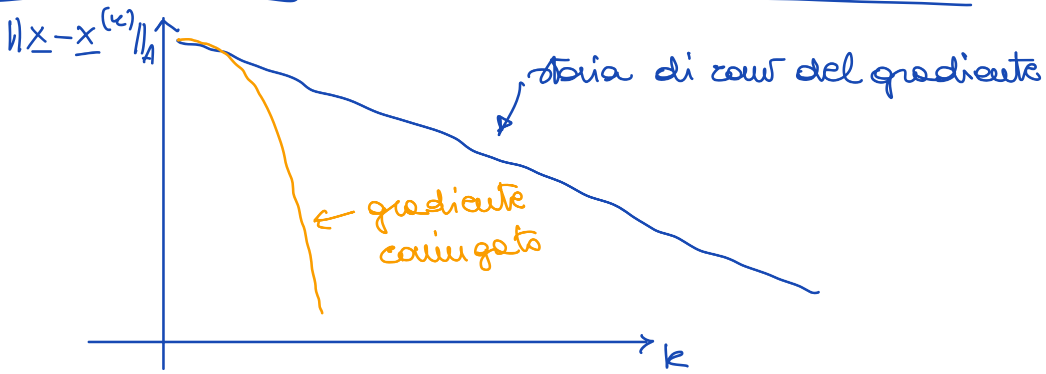
In assenza di errori di arrotondamento, il GC arriva alla sol esatta $\underline{x}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ al più in n iterazioni, dove n è la dimensione del sistema

Teorema (GC) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp, in assenza di errori di arrot., il metodo del GC converge alla soluzione esatta al + in n iterazioni.
Inoltre $\forall\, k \le n$ si ha

$$\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|_A \le \frac{2 \cdot c^k}{1 + c^{2k}} \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|_A$$

dove $c = \dfrac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1}$.

decresce più velocemente di ρ^k del gradiente quando k cresce



Se A non è sdp, $\exists$ metodi, generalizzazioni del metodo GC:

BiCGStab (Bi-gradiente coniugato stabilizzato)

GMRES (generalized minimal residual)