Integrazione numerica (formule di quadratura fdq)

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$

? $I=\int_a^b f(x)\,dx$ sfruttando solo alcuni valori di f in determinati punti dell'intervallo

Approx f con $\tilde{f}$ interpolante f

def $\tilde{I}=\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ e approx I con $\tilde{I}$

Ora considero $\tilde{f}=p_n(x)$ interp. globale di Lagrange di grado n che interpola f in $(n+1)$ nodi, cioè

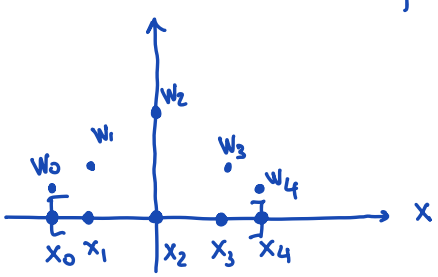
$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$$

($\varphi_i(x)$ polinomi della base di Lagrange)

$$\tilde{I}_n=\int_a^b p_n(x)\,dx=\int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)\,dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,w_i$$

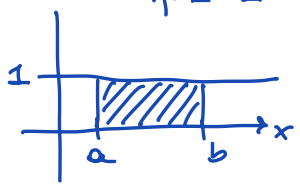
w_i = pesi di quadratura



$$\sum_{i=0}^{n} w_i = b-a$$

Se $f\equiv 1$ garantisce che se $f\equiv$ costante $\Rightarrow \tilde{I}_n=I$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a$$



$$w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \dots = (b-a)\boxed{\int_0^1 \hat{\varphi}_i(t)\,dt} \quad = \text{tabulati}$$

$t \in [0,1]$ e si fa il cambio di variabile

$$\boxed{\tilde{I}_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i}$$ f dà di tipo interpolatorio

? $$|I - \tilde{I}_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \big(f(x) - p_n(x)\big)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x) - p_n(x)|\,dx$$

$$\le \int_a^b \underbrace{\max_{a\le x\le b} |f(x) - p_n(x)|}_{\|f - p_n\|_\infty}\,dx$$

$$= \|f - p_n\|_\infty \cdot (b-a)$$

$$\underbrace{|I - \tilde{I}_n|}_{\text{errore di integrazione}} \le \underbrace{\|f - p_n\|_\infty (b-a)}_{\text{errore di interpolazione}} \qquad \text{se } n \to \infty$$

Queste formule sono buone solo se si scelgono nodi non equisp (tipo Chebyshev)
altrimenti se i nodi sono equi e n è alto si ha un grosso errore di interpol e anche nell'integrazione.

Se tanti punti per calcolare l'$\int$ e sono equisp
$\Rightarrow$ si usa l'interpolatore composito.

Formula di quadratura del punto medio

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\qquad I = \int_a^b f(x)\,dx$

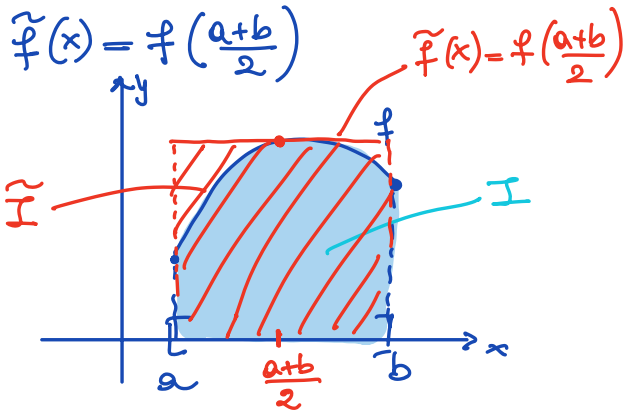
Approx f con $\tilde{f}(x)$ = retta con interpola f nel punto medio dell'intervallo

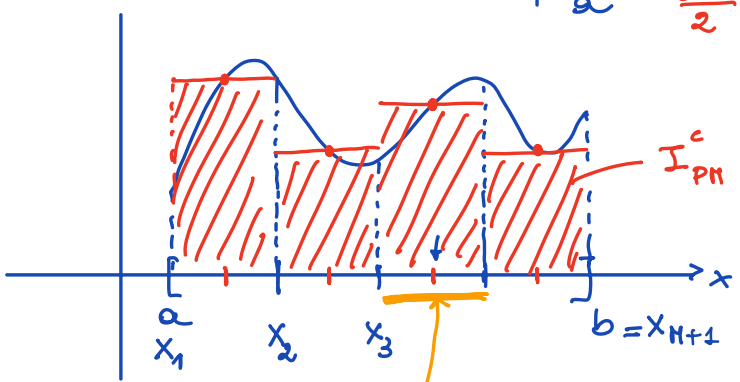
$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\tilde{I} = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\neq$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$





$[a,b]$ = unione di M sottointervalli disgiunti

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \Rightarrow$$ (additività dell'integrale)

$$I^c_{PM} = \tilde{I} = \sum_{k=1}^{M} (x_{k+1} - x_k)\, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

peso

fdc del punto medio composito

Teorema: Se $f \in C^2([a,b])$ allora

$$|I - I^c_{PM}| \le \frac{(b-a)}{24} \cdot H^2 \, \|f''\|_\infty$$

dove $H = \max_{1 \le k \le n} |x_{k+1} - x_k|$.

OSS se $H \to 0 \Rightarrow$ l'errore $\to 0$ almeno come H^2

Se f è un pol di grado 1 $\Rightarrow$ l'errore è nullo, cioè $I^c_{PM} = I$, la formula del p.m composita integra esattamente f.

Def: Una fdq ha ordine di accuratezza p rispetto ad H se l'errore tra l'integrale esatto e quello approssimato tende a zero come H^p quando $H \to 0$

Def Una fdq ha grado di esattezza pari a q se integra esattamente tutti i polinomi di grado q ma non tutti i polinomi di grado $> q$.

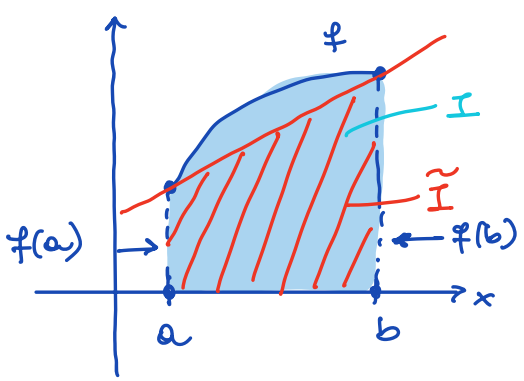
PM comp ha ordine di acc $= 2$ e grado di esattezza $= 1$.

Formula di quadratura dei trapezi

Approssimo f con il polinomio di grado 1 che interpola f negli estremi dell'intervallo.

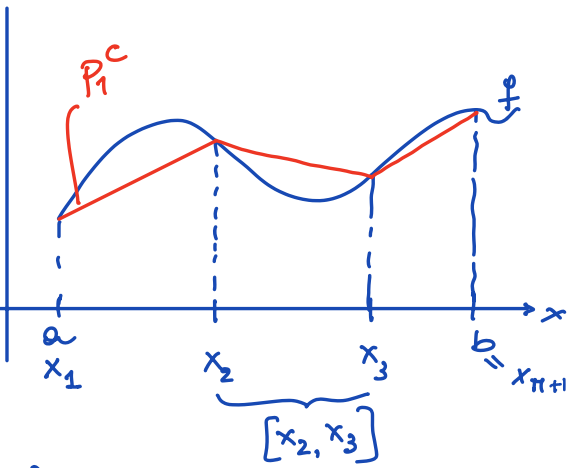
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\tilde{I} = \frac{(f(a) + f(b))}{2}(b-a)$$



$$I = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

$$I_T^c = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\left(x_{k+1}-x_k\right)$$



Teorema Se $f \in C^2([a,b]) \Rightarrow$

$$|I - I_T^c| \le \frac{(b-a)}{12} H^2 \|f''\|_\infty .$$

dove $H = \max_{1\le k\le n} |x_{k+1} - x_k|$

ordine di accuratezza $= 2$

grado di esattezza $= 1$

23/11/26

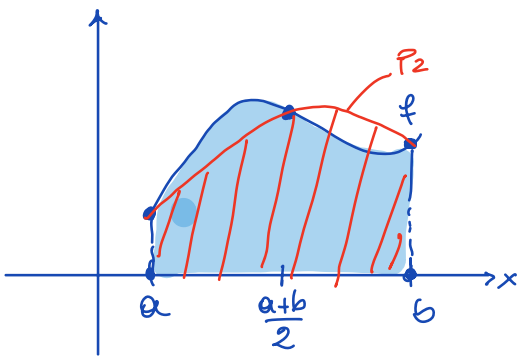
Formula di Simpson

f è approssimata dal polinomio di Lagrange che interpola f in a, b, $\frac{a+b}{2}$

? $I = \int_a^b f(x)\,dx$

$I_S = \int_a^b p_2(x)\,dx$ ////

$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\,\varphi_i(x)$



dove $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$I_S = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

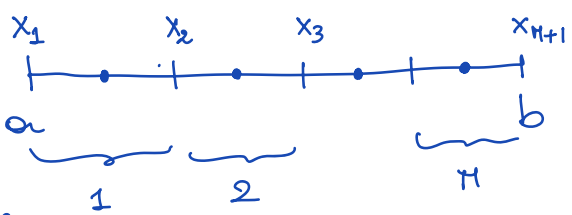
$$= f(a)\underbrace{\frac{b-a}{6}}_{w_0} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\frac{4}{6}(b-a)}_{w_1} + f(b)\underbrace{\frac{b-a}{6}}_{w_2}$$

($x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$)

formula di quad interp $\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$

x_i: nodi di interp $\equiv$ nodi di quadratura; w_i: pesi di quad

Versione composita della formula di Simpson



$$I_S^c = \sum_{k=1}^{M}\left[\frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(f(x_k)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f(x_{k+1})\right)\right]$$

Teorema: Se $f \in C^4([a,b])$ allora

$$|I - I_S^c| \leq \frac{(b-a)}{16\cdot 180} H^{(4)} \|f^{IV}\|_\infty$$

(I: esatto)

dove $H = \max_{1\leq k\leq M} |x_{k+1}-x_k|$

Simpson ha ordine di accuratezza = 4 rispetto ad H

quando $H \to 0 \Rightarrow |I - I_S^c| \sim H^4$

Quando $f^{IV} \equiv 0 \Rightarrow |I - I_S^c| = 0$

Simpson ha grado di esattezza pari a 3

	n° nodi di quadratura	ordine di acc.	grado di esattezza	chiusa/aperta
punto medio comp.	1	2	1	aperta
trapezi comp	2	2	1	chiusa
Simpson composito	3	4	3	chiusa

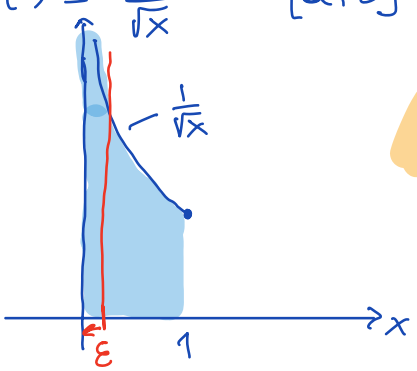
Def Fdq si dice aperta se i nodi di quadrature sono interni all'intervallo cioè gli estremi dell'intervallo (a,b) non sono tra i nodi di quadratura.

Fdq si dice chiusa se gli estremi a e b dell'inter. sono tra i nodi di quadratura

Confronto tra pto medio e trapezi.

Non posso usare trapezi : qua f non è definita in a o in b

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad [a,b] = [0,1]$ $\quad ? I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$



$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-1/2+1} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\left[1 - \sqrt{\varepsilon}\right] = 2$$

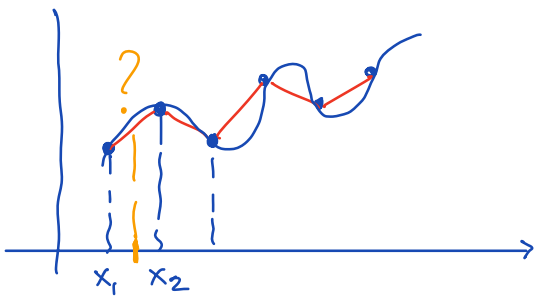
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

posso usare pto medio perché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è definita $\forall x \neq 0$

Non posso usare trapezi o Simpson perché queste 2 formule richiedono di valutare $f(0)$.

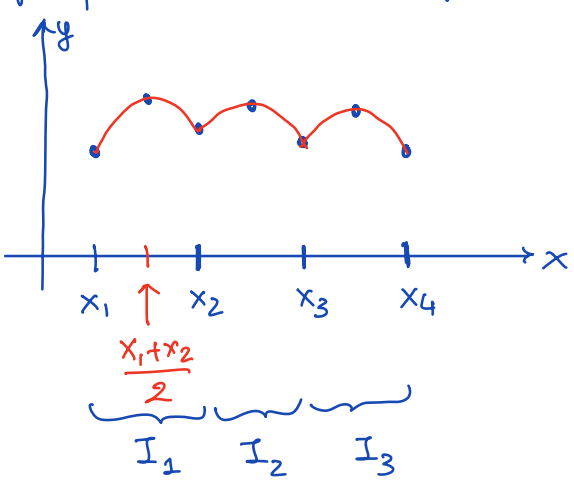
Esempio in cui non posso usare pto medio

Conosco x_i e $f(x_i)$ come output di un programma o come misure

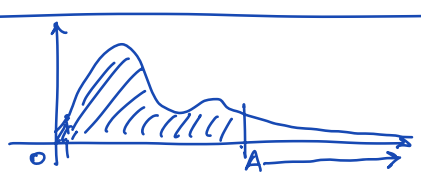


posso usare trapezi, ma non posso valutare f tra un nodo e l'altro.

Se x_i sono equisp, potrei usare Simpson



$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)\,dx$$



Derivazione numerica

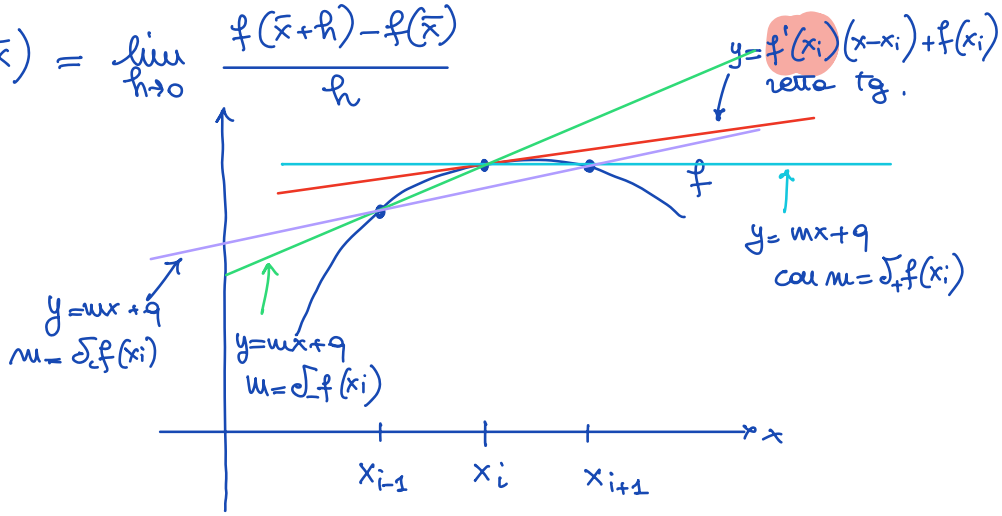
Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f derivabile

sia $\bar{x} \in [a,b]$? $f'(\bar{x})$ utilizzando alcuni valori di f

$f(\bar{x})$, $f(\bar{x}-h)$, $f(\bar{x}+h)$ con $h>0$

senza usare le formule di derivazione

Def $f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$



differenza finita in avanti $\Delta_+ f(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$

differenza finita all'indietro $\Delta_- f(x_i) = \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

differenza finita centrata $\Delta_c f(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}}$

D'ora in poi supponiamo che x_i siano equispaziati

sia $h = x_{i+1} - x_i$

? errore per la differenza finita in avanti

? $|f'(x_i) - \Delta_+ f(x_i)|$

scrivo lo sviluppo di Taylor di grado 1 centrato in x_i della funzione f con resto di Lagrange

$$f(x) = \underbrace{p_n(x)}_{\text{pol di Taylor}} + \underbrace{r_n(x)}_{\text{resto}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_i)^{n+1}}_{r_n(x)}$$

(ξ in x_i)

$n=1$

$$f(x) = \underbrace{f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i)}_{p_1(x)} + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)^2$$

ξ è incognito si trova tra x e x_i

Valuto f in $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{h} + \frac{f''(\xi)}{2}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^2}_{h^2}$$

$$\underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}_{\Delta_+ f(x_i)} = f'(x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}h$$

$$\Delta_+ f(x_i) - f'(x_i) = \frac{f''(\xi)}{2}h$$

$$\left| \delta_+ f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h}{2} \cdot \|f''\|_\infty$$

la diff finita in avanti approx $f'(x_i)$ con un errore che si comporta come h quando $h \to 0$ a patto che

$f \in C^2(I)$ $\quad$ I = intervallo contenente i punti x_i, x_{i+1}

Analogamente

$$\left| \delta_- f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h}{2} \|f''\|_\infty$$ ordine 1 in h

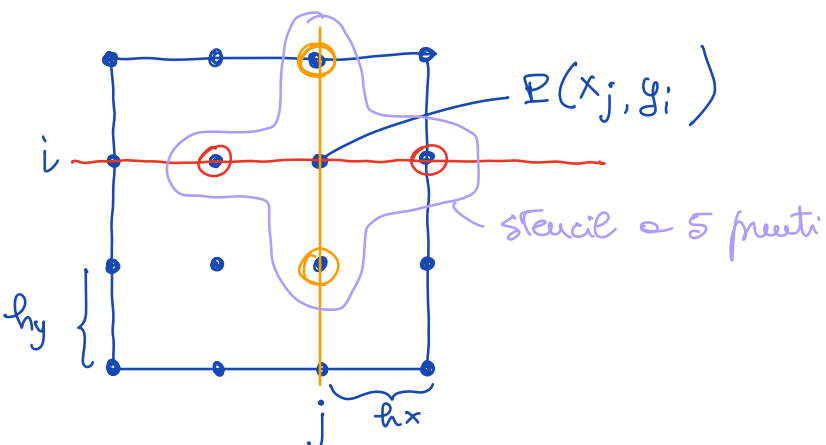
Invece

$$\left| \delta_c f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h^2}{12} \|f^{(3)}\|_\infty \quad (\text{se } f \in C^3)$$

ordine 2 rispetto ad h

In 2D

$f(x,y)$



$$? \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_i) \sim \frac{f(x_{j+1}, y_i) - f(x_{j-1}, y_i)}{2h_x}$$

$$? \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i) \sim \frac{f(x_j, y_{i+1}) - f(x_j, y_{i-1})}{2h_y}$$

diff finite centrate del 2° ordine

Differenza finita all'indietro di ordine 2
(BDF2)
backward differentiation formula

$$\delta_{BF2} f(x_i) = \frac{1}{2h}\left(3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})\right)$$

appx di ordine 2 di $f'(x_i)$

