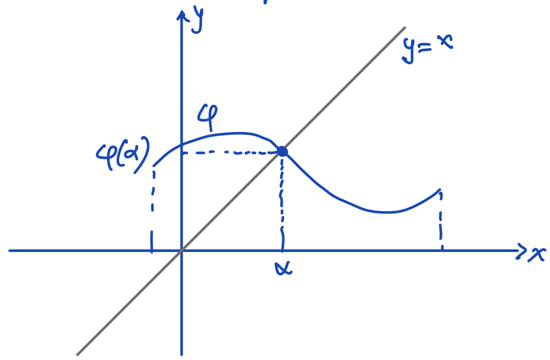
Definizione. Sia $\varphi : \mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che $\alpha \in \mathrm{dom}(\varphi)$ è PUNTO FISSO per φ se

$$\varphi(\alpha) = \alpha$$

cioè se $x=\alpha$ risolve l'eqz $\varphi(x) = x$.



$$\varphi(x) = x \iff f(x) = \varphi(x) - x = 0$$

se $\alpha : \varphi(\alpha)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=0$ e viceversa

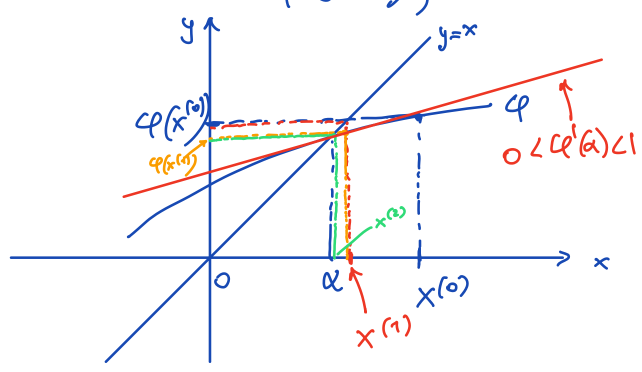
Data φ, per calcolare un pto fisso di φ, si ha il <u>metodo di punto fisso</u>

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad k \geq 0 \end{cases}$$

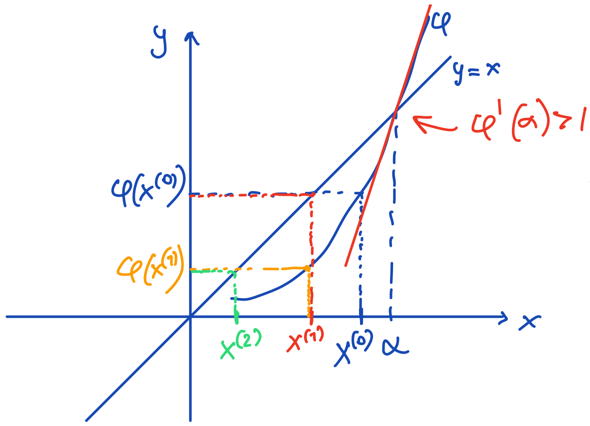
Il metodo di p. fisso costruisce una succ $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ con l'obiettivo che $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$.

dato $x^{(0)}$, calcolo $x^{(1)} = \varphi(x^{(0)})$, calcolo $x^{(2)} = \varphi(x^{(1)})$

φ crescente, $x^{(k)} \to \alpha$ in maniera monotona



qui $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$



$x^{(k)} \not\to \alpha$, $k \to \infty$

φ crescente
$x^{(k)}$ diverge
in maniera
monotona

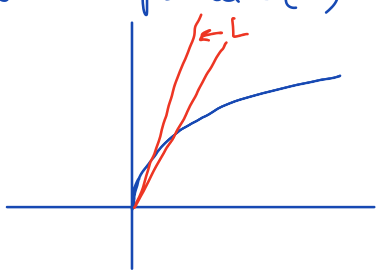
? capire quando $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$

Def $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ è lipschitziana su I se $\exists L > 0 : \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$ si ha

$$(1) \qquad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1| .$$

La dis (1) può essere riscritta come $\dfrac{|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \leq L$

es: $\varphi(x) = \sqrt{x}$ non è lips in $I(0)$



Teorema

Sia $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ continua. Allora:

1) $\exists$ almeno un punto fisso per φ in $[a,b]$

2) Se φ è lips con costante $0 < L < 1 \Rightarrow$ il punto fisso è unico in $[a,b]$ e $\forall x^{(0)} \in [a,b]$ la succ $\{x^{(k)}\}$ generata con il metodo di pto fisso converge ad α.

φ_1 e φ_2 sono derivabili

$\Rightarrow$ lips

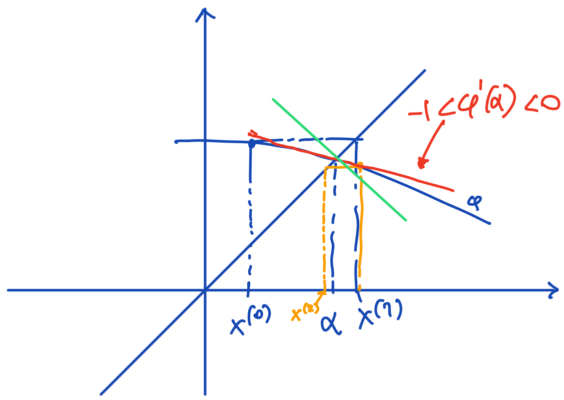
e $L_1 = \max_{a \le x \le b} |\varphi_1'(x)|$

$L_2 = \max_{a \le x \le b} |\varphi_2'(x)|$

$0 < L_1 < 1 \Rightarrow \exists!$ pto fisso

$L_2 > 1 \Rightarrow$ esiste più di 1 pto fisso

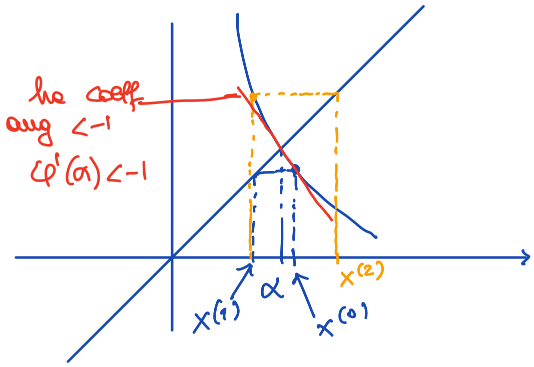
Esempi



φ decrescente

$\{x^{(k)}\}$ oscilla attorno ad α

$x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha$



φ decresce

$\{x^{(k)}\}$ oscilla attorno ad α

$x^{(k)} \not\xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha$

Teorema di OSTROWSKI

Sia $\varphi \in C^1(I)$ e sia α pto fisso di $\varphi(x)$

Se $|\varphi'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x^{(0)} \in I_\delta(\alpha)$, la succ $x^{(k)}$ generata col metodo di pto fisso converge ad α.

Inoltre, se $\varphi'(\alpha) \neq 0$, il metodo converge con ordine 1 cioè $\quad |x^{(k+1)}-\alpha| \leq C\,|x^{(k)}-\alpha| \quad \forall k \geq 0$

e $C \sim |\varphi'(\alpha)|$.

OSS Minore è C e più veloce è la riduzione dell'errore

$|\varphi'(\alpha)|$

Test d'arresto, calcolo $x^{(k)}$ fino a quando $\underbrace{|x^{(k)}-\alpha|}_{\text{l'errore è in calcolabile}} < \varepsilon$

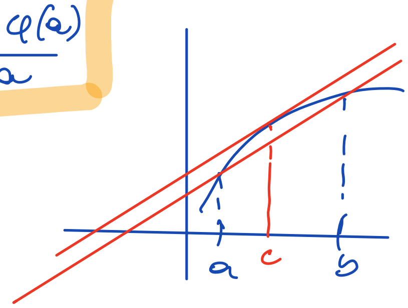
Stimatore dell'errore $= |x^{(k)}-x^{(k+1)}|$

Voglio capire quanto buono è questo stimatore

Ricordo:

(1) thm di Lagrange: se φ è cont $[a,b]$ e deriv. su (a,b) allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\boxed{\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}}$$



(2) se φ è continua sul suo dominio e ho una succ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

allora $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \varphi(\alpha)$

(φ commuta col limite)

se $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \Rightarrow \varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha)$

Parto da $x^{(k+1)} - x^{(k)} \underset{\pm\alpha}{=} (\underbrace{x^{(k+1)}}_{\varphi(x^{(k)})} - \underbrace{\alpha}_{\varphi(\alpha)}) - (x^{(k)}-\alpha) =$

$$= \left(\varphi(x^{(k)}) - \varphi(\alpha)\right) - \left(x^{(k)} - \alpha\right) =$$

$$\overset{\text{Lagr}}{=} \varphi'(c^{(k)})\left(x^{(k)} - \alpha\right) - \left(x^{(k)} - \alpha\right) =$$

$$= \left(x^{(k)} - \alpha\right) \cdot \left(\varphi'(c^{(k)}) - 1\right)$$

$$\underbrace{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}_{\text{stimatore}} = \underbrace{|x^{(k)} - \alpha|}_{\text{errore}} \cdot \underbrace{|\varphi'(c^{(k)}) - 1|}$$

lo stimatore stima bene l'errore quando è circa 1

poiché $x^{(k)} \to \alpha \Rightarrow c^{(k)} \to \alpha$

e se $\varphi \in C^1 \Rightarrow \varphi' \in C^0 \Rightarrow \varphi'(c^{(k)}) \to \varphi'(\alpha)$

Conclusione: se $\varphi'(\alpha) \sim 0 \Rightarrow$

lo stimatore dell'errore nell'incremento stima molto bene l'errore vero

Att.ne poiché $\varphi \in C^1 \Rightarrow |\varphi'|$ è sempre limitata.

Newton come metodo di pto fisso

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \underbrace{x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}_{\varphi_N(x^{(k)})} \end{cases} \qquad k \geq 0$$

Newton è m. di pto fisso con funzione $\varphi_N(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

? $\varphi_N'(\alpha)$ $\quad \alpha =$ radice di $f =$ pto fisso di φ_N

$$\varphi_N'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{\cancel{(f'(x))^2} - \cancel{(f'(x))^2} + f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}$$

se α è radice semplice di $f \Rightarrow f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$

e quindi $\underline{\varphi_N'(\alpha)} = \dfrac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = \underline{0}$

lo stimatore dell'errore basato nell'incremento è un ottimo stimatore per Newton, perché

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \sim |x^{(k)} - \alpha| .$$

Teorema Se $\varphi \in C^2(I)$ ed $\exists\, \alpha \in I : \varphi(\alpha) = \alpha$ e inoltre $\varphi'(\alpha) = 0$, allora ~~la~~ succ generata dal metodo di p. fisso converge quadraticamente, cioè con ordine 2.

Algoritmo dei metodi di pto fisso.

Input: φ, $x^{(0)}$, tol, kmax

Output: alpha, k, ERR

alpha: appx di α — k: iteraz svolte — ERR: vettore degli errori

```
k <- 0        cont di iteraz
err = tol + 1
while    k < kmax  &  err >= tol
         xnew = φ(xφ)
         err = abs(xnew - xφ)
         k = k+1
         xφ = xnew
         aggiorno ERR
end
alpha = xnew
```